Задачник «Кванта» по математике

Условия задач

1970 год

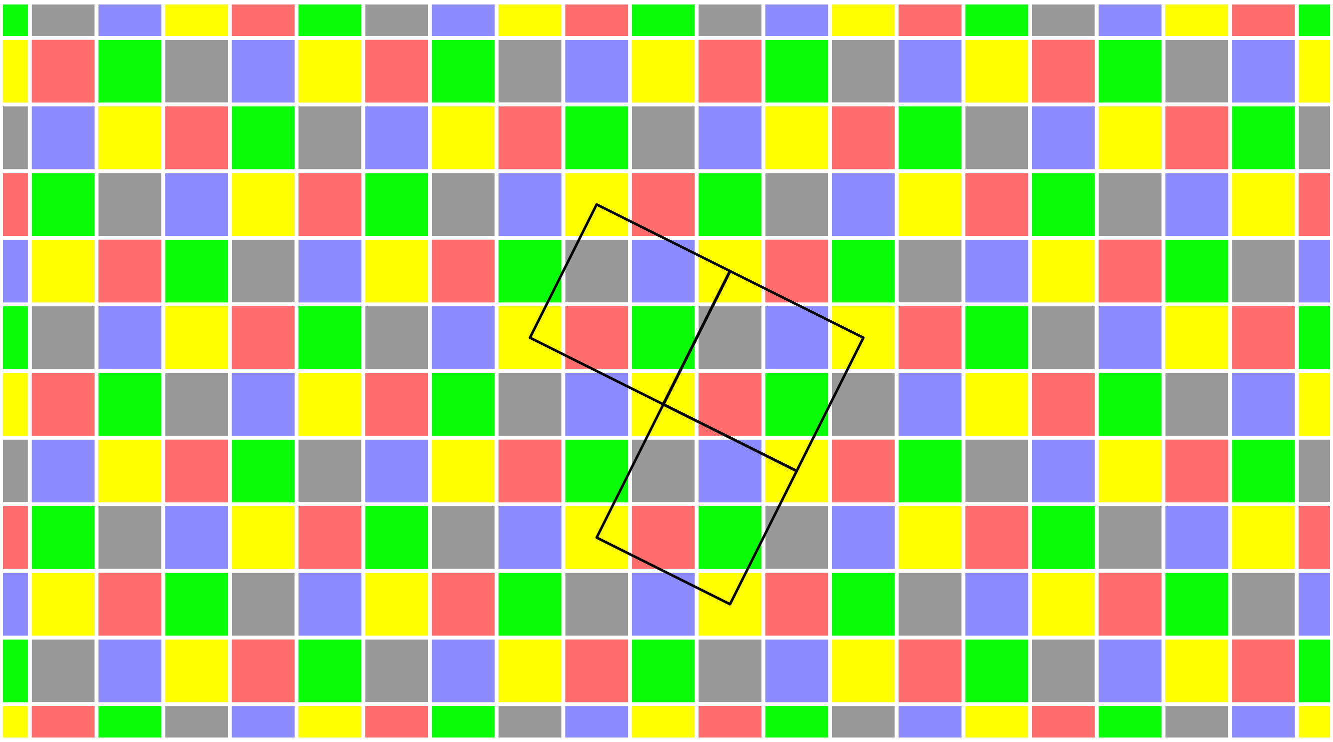
1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 000 000 избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Он хочет быть демократически избранным. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: всех избирателей разбивают на несколько равных групп, затем каждую из этих групп вновь разбивают на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбивают на равные группы и так далее; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в ещё большей группе и так далее; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес сам делит избирателей на группы. Может ли он так организовать выборы, чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

XXXII московская олимпиада. Решение — в №7–1970

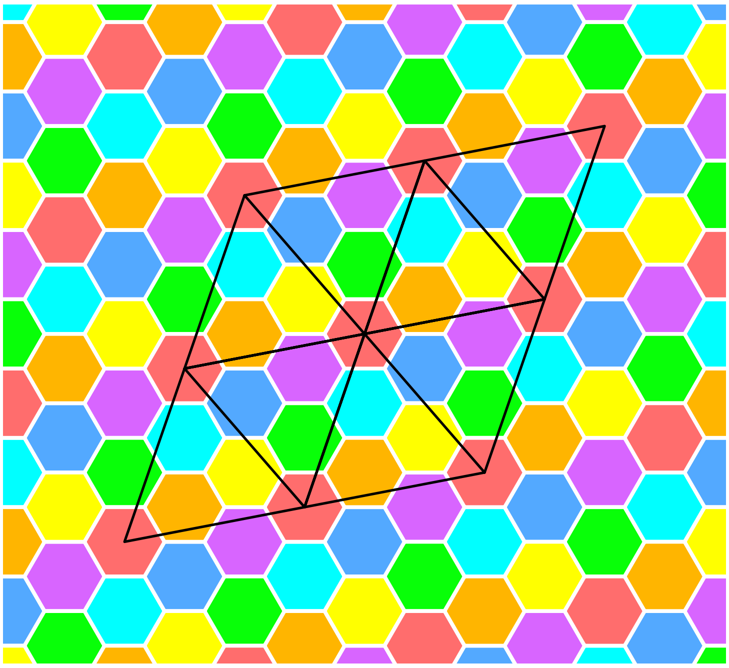
2. Дана сфера радиуса 1. На ней расположены равные окружности $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ радиуса r, где $n > 2$. Окружность γ_0 касается всех окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; кроме того, касаются друг друга окружности γ_1 и γ_2, γ_2 и $\gamma_3, \ldots, \gamma_n$ и γ_1. При каких n это возможно? Вычислите соответствующий радиус r.

XVIII олимпиада Чехословакии. Решение — в №7–1970

3. а) На рисунке плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?



б) На другом рисунке плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решётки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?



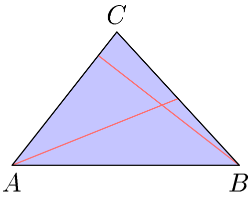
Примечание. В пункте а) количество цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). В пункте б) вы без труда найдёте решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, то есть описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Например, существует ли в пункте б) раскраска в тринадцать цветов?

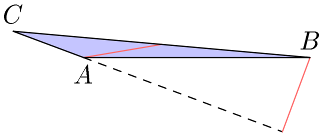
А.Н.Колмогоров. Решение — в №7 и №8–1970

Примечание редакции. Автор задачи забыл потребовать, чтобы решётки, соответствующие разным цветам, получались друг из друга параллельными переносами. Без этого требования задача гораздо проще и менее интересна, чем с ним. Решите её в обеих формулировках!

4. Дан отрезок AB. Найдите множество таких точек C плоскости, что медиана треугольника ABC, проведённая из вершины A, равна высоте, проведённой из вершины B.

XXXII московская олимпиада. Решение — в №8–1970





5*. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для любых двух элементов множества E существует единственное выделенное подмножество, содержащее оба элемента. Докажите неравенство $m \geqslant n$.

Н.Бурбаки, А.Л.Тоом, Ж.М.Раббот и В.Гутенмахер. Решение — в №8–1970 и в главе «Прямые на плоскости и разложения графов» книги М.Айгнера и Г.Циглера «Доказательства из Книги»

6. Сколько существует положений стрелок часов, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная? (Положения стрелок можно определить точно, но следить за движением стрелок нельзя.)

Н.Б.Васильев и Ж.М.Раббот. Решение — в №9–1970

7. a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

С.Т.Берколайко. Решение — в №9–1970. Статья «Стороны треугольника» третьего (9/10) номера 1993 года

8. Играют двое. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берёт себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны,— окажется чётное число спичек. Кто выиграет при

правильной игре — начинающий или его партнёр? Как он должен играть, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечётное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек $2n+1$ и разрешено брать любое число спичек от 1 до m. *Н.Б.Васильев и А.Л.Тоом.* *Решение — в №10–1970*

9. Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдр — это произвольная треугольная пирамида):

- все грани одной площади;
- каждое ребро равно противоположному;
- все грани конгруэнтны;
- центры описанной и вписанной сфер совпадают;
- для любой вершины тетраэдра сумма величин сходящихся в этой вершине плоских углов равна 180°.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны. Найдите ещё несколько равносильных им свойств тетраэдра. *Н.Б.Васильев и А.Л.Тоом.* *Решение — в №10–1970*

10. Четыре круга, центры которых — вершины выпуклого четырёхугольника, целиком покрывают этот четырёхугольник. Докажите, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов. *Г.А.Гальперин.* *Решение — в №10–1970*

11. а) На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

б) А если чижей и деревьев n? *Из задач вечерней математической школы при МГУ.* *Решение — в №11–1970 и на странице 40 двенадцатого номера 1970 года*

12. Какие четырёхугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырёхугольника? *Н.Б.Васильев и М.И.Башмаков.* *Решение — в №11–1970*

13. Если разность между наибольшим и наименьшим из n данных вещественных чисел равна d, а сумма модулей всех $n(n-1)/2$ попарных разностей этих чисел равна s, то $(n-1)d \leqslant s \leqslant n^2d/4$. Докажите это. *Н.Б.Васильев и М.И.Башмаков.* *Решение — в №11-1970*

14. Некоторые грани выпуклого многогранника покрашены так, что никакие две покрашенные грани не имеют общего ребра. Докажите, что в этот многогранник нельзя вписать шар, если а) покрашенных граней больше половины; б) сумма площадей покрашенных граней больше суммы площадей непокрашенных граней. *Н.Б.Васильев и М.И.Башмаков.* *Решение — в №11–1970. Статья Е.М.Андреева «Невписываемые многогранники» восьмого номера 1970 года*

15. Квадратная таблица размером $n \times n$ заполнена неотрицательными числами так, что как сумма чисел любой строки, так и сумма чисел любого столбца равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать n положительных чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №11–1970. Комментарий — в статье М.И.Башмакова «Паросочетания и траспортные сети» четвёртого номера 1970 года*

16. Многочлен с целыми коэффициентами, который при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня. Докажите это. *Н.Б. Васильев.* *Решение — в №12–1970*

17. Крестьянин, подойдя к развилке двух дорог, расходящихся под углом 60°, спросил: «Как пройти в село NN?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни N — это в восьми верстах отсюда,— там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога,— это как раз дорога в NN. А можешь идти другим путём: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге,— значит, половину пути прошёл; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого NN». — «Ну, а какой путь короче-то будет?» — «Да всё равно, что так, что этак, никакой разницы.» И пошёл крестьянин по правой дороге.

Сколько вёрст ему придётся идти до NN? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до NN напрямик? (Все дороги прямые.)

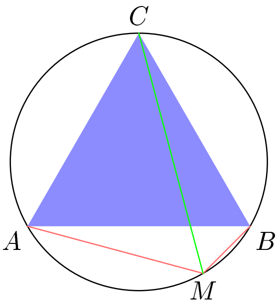
Н.Б. Васильев. *Решение — в №12–1970*

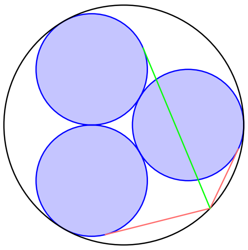
18. а) Для любой точки M описанной около правильного треугольника ABC окружности длина одного из отрезков MA, MB и MC равна сумме длин двух других. Докажите это.

б) Три равные окружности касаются друг друга, а четвёртая окружность касается всех трёх. Докажите, что для любой точки четвёртой окружности длина касательной, проведённой из неё к одной из трёх окружностей, равна сумме длин касательных, проведённых из неё к двум другим окружностям.

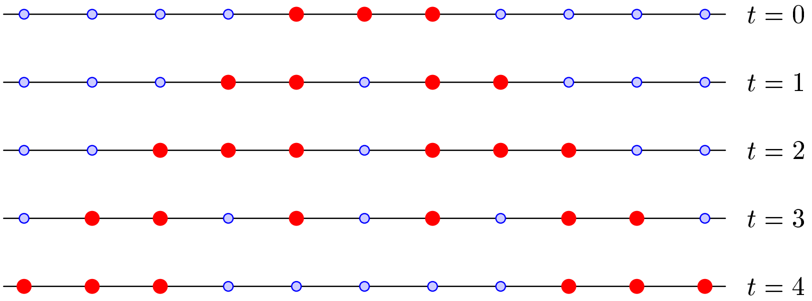
Н.Б. Васильев.

Решение — в №12–1970. Статья М.Ю.Панова и А.В.Спивака «Вписанные многоугольники» первого номера 1999 года

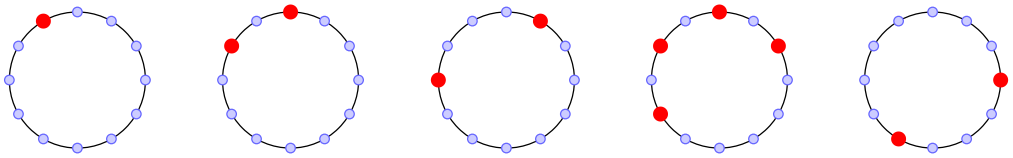




19. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если клетка возбудилась, то она сразу посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через миллисекунду) доходит до обеих её соседок. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал только от одной из соседних клеток. Например, если в начальной момент времени возбуждены три соседние клетки, а остальные покоятся, то возбуждение будет распространяться следующим образом:



Пусть в начальный момент времени возбуждена только одна клетка. Сколько будет возбуждённых клеток через 15 мсек? 65 мсек? 1000 мсек? вообще, через t мсек?



А если цепочка не бесконечная, а состоит из соединённых в окружность n клеток, будет возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

Н.Б.Васильев. Начало решения — в №12–1970 и №8–1971; окончание — в решении задачи М56 (восьмой номер 1971 года). Статья Д.Б. и М.Б. Фуксов «Арифметика биномиальных коэффициентов»

20. Разбейте правильный треугольник на миллион многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из них. *XXXI московская олимпиада. Решение — в №12–1970*

21. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите существование прямой, пересекающей по крайней мере четыре из этих окружностей.

    Из задач вечерней математической школы при МГУ. Решение — в №2–1971

22. а) В угол вписаны две окружности; их общая внутренняя касательная T_1T_2 (где T_1 и T_2 — точки касания) пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите равенство $A_1T_1 = A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2 = A_2T_1$).

    б) В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках K_1 и K_2, другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на окружностях хорды равной длины. *Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1971*

23. Для любого натурального числа n, большего единицы, отношение произведения первых n чётных чисел к произведению первых n нечётных чисел больше числа $\sqrt{8n/3}$, но меньше $\sqrt{4n}$. Докажите эти неравенства.

    А.О.Гельфонд. Решение — в №2–1971; статья Е.Николаева «Случай с методом математической индукции» седьмого номера 1970 года

24. Любую дробь m/n, где m и n — натуральные числа, $1 < m < n$, можно представить в виде суммы нескольких дробей вида $1/q$, причём таких, что знаменатель каждой следующей из этих дробей делится на знаменатель предыдущей дроби. Докажите это.

    Например, $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$ и $\frac{3}{43} = \frac{1}{15} + \frac{1}{330} + \frac{1}{14\,190}$. *Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1971*

25. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент. *Н.Б.Васильев. XXX московская олимпиада. Решение — в №2–1971*

26. Предположим, что в каждом номере задачника «Кванта» будет пять задач по математике, а журнал выходит ежемесячно. Обозначим через $f(x, y)$ номер первой из задач x-го номера за y-й год. Напишите формулу для $f(x, y)$, где $1 \leqslant x \leqslant 12$ и $1970 \leqslant x \leqslant 1989$. Решите уравнение $f(x, y) = y$.

    Например, $f(6, 1970) = 26$. Начиная с 1990 года, количество задач стало менее предсказуемым: до конца 2008 года в последние годы в половине номеров по 5 задач, а в других — по 10; с 2009 года в некоторых номерах 7 задач, а в некоторых — 8. Да и самих номеров журнала сейчас уже не 12, а 6. Задачник четвёртого номера 2006 года начинается с задачи М2006. *Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1971*

27. Если $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, то $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$. Докажите это.

    Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1971

28.* а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, есть в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет, но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке. Докажите, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

    б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

    А.Н.Виленкин. XXX московская олимпиада. Решение — в №3 и №4–1971

29. На столе лежат n одинаковых монет, образуя замкнутую цепочку. Центры монет образуют выпуклый многоугольник. а) Сколько оборотов сделает монета такого же размера за время, пока она один раз прокатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке?

б) Как изменится ответ, если радиус этой монеты в k раз больше радиуса каждой из монет цепочки? *Н.Б.Васильев.* Решение — в №4–1971

30. Любую конечную систему точек плоскости можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше количества точек, а расстояние между любыми двумя из которых больше 1. Докажите это. (Расстояние между двумя кругами — это расстояние между их ближайшими точками.)

В.И.Арнольд. Решение — в №4–1971

31. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей могло оказаться ровно 100 двадцатиугольников?

И.Н.Бернштейн. Московская олимпиада, 1970 год. Решение — в №5–1971

32. Во всех клетках таблицы размером 100×100 стоят плюсы. Разрешено одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или во всех клетках одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов? *А.В.Зелевинский. Московская олимпиада, 1970 год.* Решение — в №5–1971

33*. Рассмотрим натуральное число $n > 1000$. Найдём остатки от деления числа 2^n на числа 1, 2, 3, ..., n и найдём сумму всех этих остатков. Докажите, что эта сумма больше $2n$. *А.Г.Кушниренко. Московская олимпиада, 1970 год.* Решение — в №5–1971

34. Если натуральное число делится на 10 101 010 101, то по крайней мере шесть цифр его десятичной записи отличны от нуля. Докажите это.

А.К.Толпыго. Московская олимпиада, 1970 год. Решение — в №6–1971

35*. Около сферы с радиусом 10 описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности есть две точки, расстояние между которыми больше 21.

А.Г.Кушниренко. Московская олимпиада, 1970 год. Решение — в №6–1971

36. На плоскости нельзя расположить 7 прямых и 7 точек так, чтобы через каждую из точек проходили 3 прямые и на каждой прямой лежали 3 точки. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №6–1971

37*. В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате, стороны которого идут по линиям сетки, по модулю не превосходит единицы.

а) Докажите существование такого числа c, что сумма чисел в любом прямоугольнике, стороны которого идут по линиям сетки, не больше c; другими словами, докажите, что суммы чисел в прямоугольниках ограничены.

б) Докажите, что можно взять $c = 4$.

в) Улучшите оценку — докажите, что утверждение верно для $c = 3$.

г) Постройте пример, показывающий, что при $c < 3$ утверждение неверно.

Ю.И.Ионин. Решение — в №6–1971

38. Окружность, построенная на высоте CD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет BC в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту CD в точке L. Длины отрезков CK, CL и CM составляют геометрическую прогрессию (то есть $CK/CL = CL/CM$). Найдите величины острых углов треугольника ABC. *Л.М.Лоповок.* Решение — в №6–1971

39*. Пусть m — натуральное число, $m > 1$. Целые неотрицательные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - mxy + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = m$, $\psi_3 = m^2 - 1$, $\psi_4 = m^3 - 2m$, $\psi_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, ..., в которой $\psi_{k+1} = m\psi_k - \psi_{k-1}$ для любого натурального k. Докажите это. (Например, все решения уравнения $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ в целых числах $(x;y)$, где $0 \leqslant x < y$,— это пары (0;1), (1;3), (3;8), (8;21) соседних членов последовательности 0, 1, 3, 8, 21, 55, ..., определяемой условиями $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 1$ и $\psi_{k+1} = 3\psi_k - \psi_{k-1}$ для любого натурального k.)

Ю.В.Матиясевич. Решение — в №7–1971 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» четвёртого номера 2002 года

Этот красивый факт был использован Ю.В. Матиясевичем в его работе, посвящённой десятой проблеме Д. Гильберта; об этом рассказано в седьмом номере «Кванта» за 1970 год. Последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... называют последовательностью Фибоначчи.

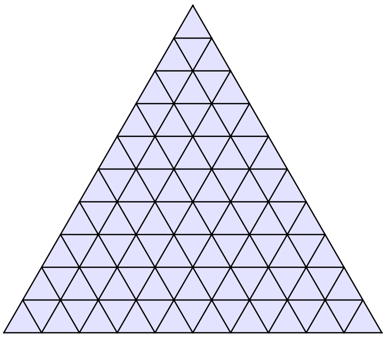
40. а) Найдите сумму $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + n \cdot 1$.

б) Решите более общую задачу: найдите величину $S_{n,k}$, являющуюся суммой $n - k + 1$ слагаемых, m-е из которых, где $1 \leqslant m \leqslant n - k + 1$, равно произведению произведения чисел от m до $k + m - 1$ и произведения чисел от $n - k + 2 - m$ до $n + 1 - m$.
В.Н.Березин. Решение — в №7–1971

41. Дана окружность, её диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 8 класс. Решение — в №7–1971

42. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записали в обратном порядке. Полученное число сложили с первоначальным. Докажите, что хотя бы одна из цифр суммы чётна.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 8 класс. Решение — в №7–1971

43. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на n^2 треугольничков. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в цепочке, в которой ни один треугольничек не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим?
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 8–10 классы. Решение — в №7–1971



44. Для любого натурального числа k существует бесконечно много натуральных чисел t, не содержащих в десятичной записи нулей и таких, что сумма цифр числа kt равна сумме цифр числа t. Докажите это.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 10 класс. Решение — в №7–1971

45*. а) Из любых 200 целых чисел можно выбрать 100 чисел, сумма которых делится на 100. Докажите это.

б) Из любых $2n - 1$ целых чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n. Докажите это.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 9 класс. Решение — в №7 и №8–1971

46. Сколько в выпуклом n-угольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?
Г.А.Гальперин. Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 8 класс. Решение — в №7–1971

47. Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите неравенства $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 9–10 класс. Решение — в №7–1971

48. Биссектриса AD, медиана BM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите неравенство $\angle BAC > 45^\circ$.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 9 класс. Решение — в №7–1971

49. На карточках написаны все числа от 11 111 до 99 999 включительно. Затем эти карточки выложили в цепочку в произвольном порядке. Докажите, что полученное 444 445-значное число не является степенью двойки.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 10 класс. 7–1971

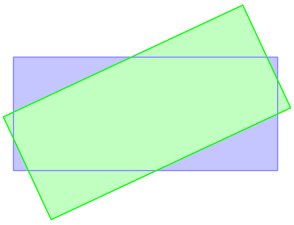
50*. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая — одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников есть два конгруэнтных. *Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 10 класс.* Решение — в №8–1971

51. Если произведение трёх положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1. Докажите это. *Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 8 класс.* Решение — в №8–1971

52. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из таких десяти треугольников остроугольный.
М.Серов. Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 9 класс. Решение — в №8–1971

53. Через середину M стороны BC и центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу вписанной окружности треугольника.
Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 10 класс. Решение — в №8–1971

54. Два конгруэнтных прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Докажите, что площадь пересечения этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.
Г.А.Гальперин. Всесоюзная олимпиада, 1970 год, 10 класс. Решение — в №8–1971



55. Множество всех натуральных чисел, в десятичных записях которых не больше n цифр, разбили на два подмножества следующим образом. В первое входят числа с нечётной суммой цифр, а во второе — с чётной. Докажите, что для любого натурального числа $k \leqslant n$ сумма k-х степеней всех чисел первого подмножества равна сумме k-х степеней всех чисел второго подмножества.
Всесоюзная олимпиада 1970 года, 10 класс. Решение — в №8–1971

56. На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. В промежутке между двумя одинаковыми числами пишем нуль, между разными цифрами — единицу, а после этого первоначальные цифры стираем. Докажите, что сколько бы раз мы ни повторили эту процедуру, мы никогда не получим набор из девяти нулей. *Е.Б.Дынкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенталь и А.К.Толпыго.* Решение — в №8–1971

57. а) Найдите число k, которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и k).

    б) Докажите, что если заменить 14 на 15, то ответов будет несколько; а при замене 14 на 17 ни одного не будет.
    Е.Б.Дынкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенталь и А.К.Толпыго. Решение — в №8–1971

58. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Прямые — биссектрисы некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Постройте этот треугольник.
Е.Б.Дынкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенталь и А.К.Толпыго. Решение — в №8–1971

59. При каких n гири массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г можно разложить на три равные по массе кучки? (Например, при $n = 9$ — можно: $9 + 6 = 8 + 7 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.)

Е.Б.Дынкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенталь и А.К.Толпыго. *Решение — в №8–1971*

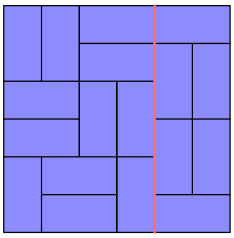
60. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на два непересекающихся подмножества так, чтобы сумма любых двух различных чисел из одного и того же подмножества содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

Е.Б.Дынкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенталь и А.К.Толпыго. *Решение — в №8–1971*

1971 год

61. Выписаны числа 0, 1, 2, 3, ..., 1024. Играют два мудреца. Первый вычёркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычёркивает 256 из оставшихся чисел, затем первый вычёркивает 128 чисел, потом второй — ещё 64 числа и так далее. Своим последним пятым ходом второй вычёркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как может играть первый игрок, чтобы получить как можно больше? Как второй, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом? *XXXII московская олимпиада.* Решение — в №9–1971

62. Для любого нечётного натурального числа a существует такое натуральное число b, что $2^b - 1$ делится на a. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №9–1971

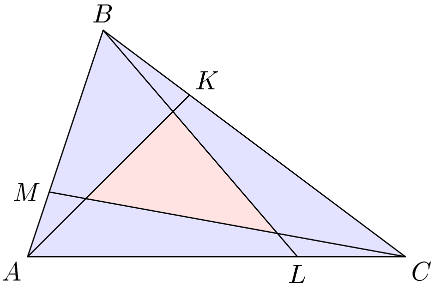


63. Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? (Изображённое на рисунке расположение плиток не годится, поскольку есть красный «шов».) *А.А.Кириллов.* Решение — в №9–1971

64. На плоскости даны прямая l и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от неё. Найдите на прямой l точку M, для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM, наименьшее. *Г.А.Палатник.* Решение — в №10–1971

65. а) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметим соответственно точки K, L и M таким образом, что $\frac{AM}{MB} = \frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LA} = k$. Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AK, BL и CM, к площади треугольника ABC.

б) Разрежьте произвольный треугольник шестью прямыми на части, из которых можно сложить семь равных треугольников. *А.Л.Сойфер.* Решение — в №10–1971



66. Вот несколько примеров, когда сумма квадратов k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $k-1$ следующих натуральных чисел:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2,$$
$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2.$$

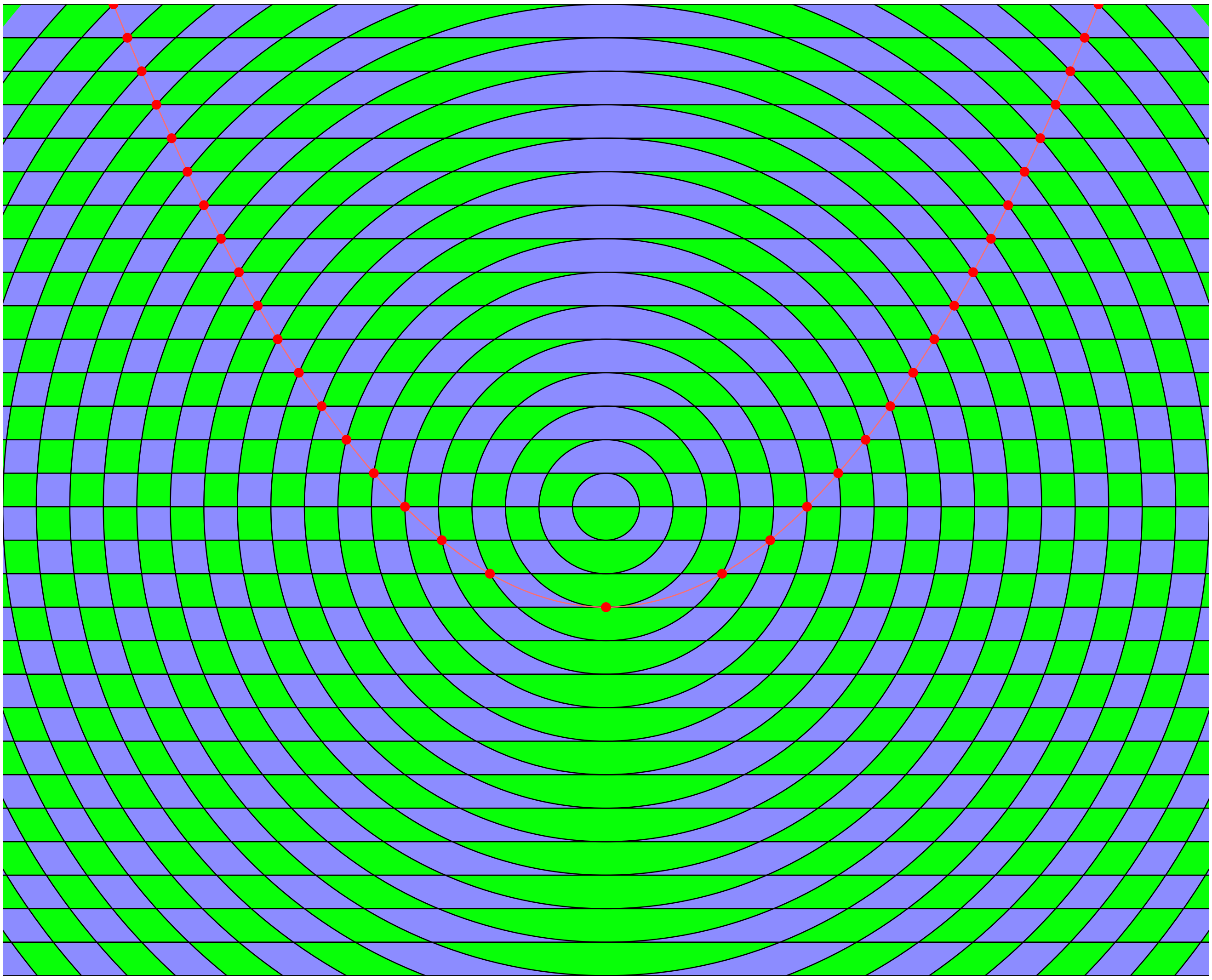
Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

А.И.Милованов. Решение — в №10–1971

67. Ювелиру заказали золотое кольцо шириной h, имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара с центром O и поверхностью цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку O. Мастер сделал такое колечко, но выбрал r слишком маленьким. Сколько золота ему придётся добавить, если r нужно увеличить в k раз, а ширину h оставить прежней? *Н.Б.Васильев.* Решение — в №10–1971

68. Сеть линий, изображённая на рисунке, состоит из концентрических окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4, ... и центром в точке O, прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке красных точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами синей клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому рисунок словно соткан из парабол).

А.Н.Виленкин. Иллюстрация — на первой странице оболожки второго номера 1971 года. Решение — в №10–1971



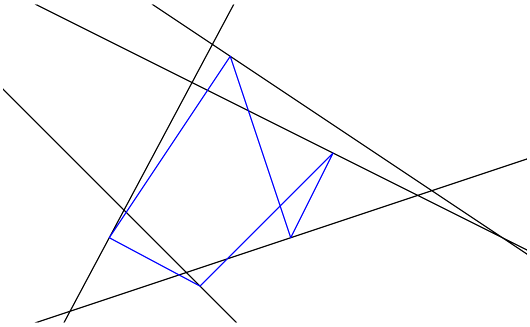
69. Последние две цифры числа $76^2 = 5776$ — это снова 76. а) Существуют ли ещё такие двузначные числа?

б) Найдите все такие трёхзначные числа a, что последние три цифры числа a^2 составляют число a.

в) Существует ли такая бесконечная последовательность цифр a_1, a_2, a_3, ..., что для любого натурального n квадрат числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ оканчивается на эти же n цифр? (Очевидный ответ $a_1 = 1$ и $0 = a_2 = a_3 = \ldots$ мы исключаем.)

А.Н.Виленкин и Н.Б.Васильев. Решение — в №10–1971

70. Пусть l_1, l_2, ..., l_n — несколько прямых на плоскости, не все из которых параллельны. Докажите, что можно единственным образом выбрать на каждой из этих прямых по точке X_1, X_2, ..., X_n так, чтобы перпендикуляр, восставленный к прямой l_k в точке X_k (для любого натурального $k < n$), проходил через точку X_{k+1}, а перпендикуляр, восставленный



к прямой l_n в точке X_n, проходил через точку X_1. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему стереометрии.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №11–1971*

71. а) Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания. Докажите это.

б) Что будет, если действовать в другом порядке: в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — в строках: обязательно ли в результате получится та же самая таблица, что и в первом случае, или может получиться другая? *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №11–1971*

72. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p$, где p — данное вещественное число.

Ю.И.Ионин. *Решение — в №11–1971*

73. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причём все такие возможности равновероятны), окажется, что угаданы ровно 4 клетки? 5 клеток? ... все 8 клеток? *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №11–1971*

74. Многочлен p и число a таковы, что для любого числа x верно равенство $p(x) = p(a-x)$. Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. (Например, если $p(x) = x^5 + (1-x)^5$, то, очевидно, $p(x) = p(1-x)$ и, как нетрудно проверить, $p(x) = 5y^2 + 2{,}5y + 0{,}0625$, где $y = (x-0{,}5)^2$.) *А.Л.Тоом.* *Решение — в №12–1971*

75. Докажите для любого выпуклого многогранника следующие утверждения.

а) Сумма длин рёбер больше утроенного диаметра. (Диаметр многогранника — это наибольшая из длин отрезков с концами в вершинах многогранника.)

б) Для любых вершин A и B многогранника существуют три ломаные, каждая из которых идёт по его рёбрам из A в B и никакие две не проходят по одному ребру.

в) Если разрезать любые два ребра, то для любых двух вершин A и B многогранника существует соединяющая их ломаная, идущая по оставшимся рёбрам.

г) В пункте б) можно выбрать три ломаные, никакие две из которых не имеют общих вершин, за исключением точек A и B. *А.Г.Кушниренко.* *Решение — в №12–1971*

76. В некоторой компании у каждых двух незнакомых ровно двое общих знакомых, а у любых двоих знакомых нет больше ни одного общего знакомого. Докажите, что в этой компании каждый знаком с одним и тем же числом людей.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №12–1971*

77. Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Докажите, что длина биссектрисы угла между ними не больше 12. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1972*

78. Каждое неотрицательное целое число представимо, причём единственным образом, в виде $\frac{x^2+x}{2}+y$, где x и y — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству $x \geqslant y$. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1972*

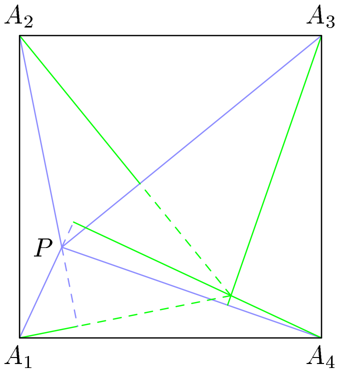
79. Точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что на плоскости существует неподвижная и всё время равноудалённая от точек P и Q точка. *И.Ф.Шарыгин.* *Решение — в №1–1972*

80. В прямоугольной таблице расставлены произвольные числа. Разрешено одновременно изменить знак у всех чисел некоторого столбца или у всех чисел некоторой строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой неотрицательна как сумма чисел любого столбца, так и сумма чисел любой строки.

А.С.Шварц. Решение — в №1–1972. Статья Л.Д.Курляндчика и Д.В.Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года

81. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ расположена точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, из вершины A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

А.Н.Виленкин. Решение — в №1–1972



82. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то она смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна машина может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

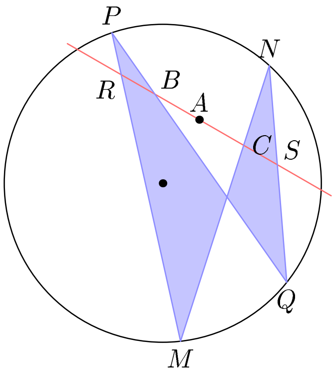
Н.Б.Васильев. Решение — в №1–1972

83*. Множество первых n натуральных чисел ни при каком $n > 1$ нельзя разбить на два множества так, чтобы произведение чисел одного из них равнялось произведению чисел другого. Докажите это.

Н.Б.Васильев. Решение — в №1–1972

84*. A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на прямую BC, причём $BA = AC$. Через точки B и C проведены секущие, одна из которых пересекает окружность в точках P и Q, вторая — в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую BC в точках R и S. Докажите равенство $AR = AS$. (Эту задачу и некоторые её варианты называют «задачей о бабочке»; происхождение названия ясно из рисунка.)

Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1972, комментарий к решению — на странице 71 этого же номера. Статья В.Ю.Протасова и В.М.Тихомирова «Геометрические шедевры Шарыгина» первого номера 2006 года



85*. Для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, никакие два из которых не равны друг другу и ни одно из которых не делится на квадрат натурального числа, большего единицы, а также для любых целых и отличных от нуля целых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ сумма $b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_m\sqrt{a_m}$ не равна нулю. Докажите это.

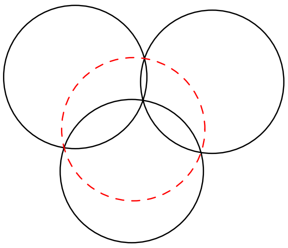
Л.Н.Васерштейн. Решение — в статье Л.Н.Камнева «Иррациональность суммы радикалов» второго номера 1972 года

86. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размера 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и заменили одну плитку 2×2 на плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

Л.Г.Лиманов. Решение — в №2–1972, комментарий к решению — на странице 64 этого же номера

87. Если три окружности одинаковых радиусов проходят через некоторую точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса. Докажите это.

В.Н.Березин. Решение — в №2–1972



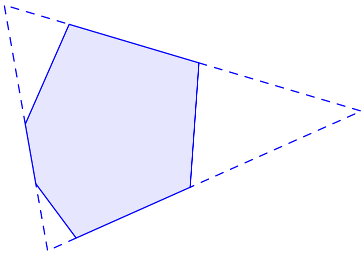
88. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b и c уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

М.Ф.Безбородников и Л.И.Москвичюте. Решение — в №2–1972

89. В любом выпуклом многоугольнике, не являющемся параллелограммом, существуют три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. Докажите это. (Например, на рисунке три пунктирные прямые удовлетворяют условию.)

И.М.Яглом.

Статья «В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешённая проблема» третьего номера 1972 года



90. Если $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ — натуральные числа, то

$$\sum_{1 \leqslant k < n} \frac{\sqrt{x_{k+1} - x_k}}{x_{k+1}} < \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^2} \frac{1}{k},$$

то есть сумма $n - 1$ дробей, k-я из которых, где $k < n$, равна отношению квадратного корня из разности $x_{k+1} - x_k$ к числу x_{k+1}, меньше суммы чисел 1, 1/2, 1/3, ... , $1/n^2$. Докажите это. *Г.И.Натансон и Ю.И.Ионин.* *Решение — в №3–1972*

91. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить крестик в свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считаем любую, имеющую с ней общую сторону или общую вершину. Второй игрок каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки. а) Докажите, что как бы ни играл первый игрок, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому было некуда поставить крестик.

б) Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешено за один ход ставить не три, а два или даже только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнёров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и можно ли оценить сверху число ходов, которые могут «продержаться» крестики) или же крестики могут играть бесконечно долго?

Изучите другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаем только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешено ставить сразу p крестиков, а второму — q ноликов. *А.П.Савин.* *Статья «Окружение десанта» третьего номера 1972 года*

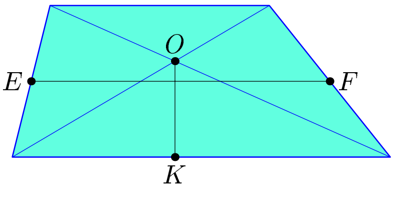
92. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день — решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел? *Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №3–1972*

93. Каждое из n данных чисел, выписанных вдоль окружности, было равно единице или минус единице. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а сами числа после этого стёрли. Сумма оставшихся n произведений оказалась равна нулю. Докажите, что n делится на 4. *А.М.Леонтович.* *Решение — в №3–1972*

94*. Если в каждой вершине выпуклого многогранника сходятся не менее чем четыре ребра, то хотя бы одна из граней — треугольник. Докажите это.

Л.Г.Лиманов. *Решение — в №3–1972*

95. На доске начертили трапецию и её среднюю линию EF. Из точки O пересечения диагоналей на большее основание опустили перпендикуляр OK и стёрли трапецию.



Восстановите чертёж по сохранившимся отрезкам EF и KO. *Л.Г.Лиманов. Решение — в №3–1972*

96. Пять положительных чисел таковы, что если из суммы любых трёх из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел. *С.Т.Берколайко. Решение — в №4–1972*

97. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = a$ и $CD = b$ проведён отрезок A_1B_1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A_2B_2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2, ... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?
А.Л.Розенталь. Решение — в №4–1972. Статья «Арифметико-геометрическая прогрессия» первого номера 1975 года

98. Верхняя строка таблицы состоит из одного лишь числа 1. Всякое другое её число равно сумме чисел, стоящих над ним непосредственно сверху, слева–сверху или справа–сверху. Докажите, что в каждой строке, начиная с третьей, есть хотя бы одно чётное число. *Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1972*

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

. . . .

99. В треугольнике ABC сторона AC — наибольшая. Докажите, что для любой точки M плоскости сумма длин отрезков AM и CM не меньше длины отрезка BM. В каких случаях возможно равенство? *Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1972*

100*. Сумма тангенсов углов величиной 1°, 5°, 9°, 13°, ..., 173°, 177° равна 45. Докажите это. *В.П.Бешкарев, С.Т.Берколайко, В.Я.Гомолич и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1972*

101. Колония состояла из n бактерий. В неё попал вирус, который в первую минуту уничтожил одну бактерию, а затем разделился на два новых вируса. Одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже разделилась на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожили две бактерии, и затем оба вируса и все выжившие бактерии снова разделились, и так далее. Будет эта колония жить бесконечно долго или вымрет? *Р.М.Ковтун. Решение — в №5–1972*

102. Множество, состоящее из конечного числа точек плоскости, обладает следующим свойством: для любых двух его точек A и B существует такая точка C этого множества, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество? *В.Гурари. Решение — в №5–1972*

103. Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a, \\ \qquad x^2 - y^2 = b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые данные действительные числа. *Э.А.Ясиновый. Решение — в №5–1972*

104. Внутри треугольника ABC лежат такие две точки P и Q, что отрезки AP и AQ составляют равные углы с биссектрисой угла A треугольника, а отрезки BP и BQ составляют равные углы с биссектрисой угла B. Докажите, что отрезки CP и CQ составляют равные углы с биссектрисой угла C. *В.Н.Березин. Решение — в №5–1972*

105. а) Сумма цифр числа после умножения на 8 может уменьшиться: $75\cdot 8 = 600$ — сумма цифр была $7+5=12$, а стала $6+0+0=6$. Однако она не может уменьшиться более, чем в 8 раз. Докажите это. Другими словами, докажите для любого натурального числа n неравенство $s(n) \leqslant 8s(8n)$, где $s(a)$ — сумма цифр десятичной записи числа a.

б*) Для каких ещё натуральных чисел k существует такое положительное число c_k, что для любого натурального n справедливо неравенство $c_k s(n) \leqslant s(kn)$? Найдите для каждого такого k наибольшее подходящее значение c_k.

И.Н.Бернштейн. *Решение — в №5–1972*

106. Если для чисел p_1, p_2, q_1 и q_2 выполнено неравенство $(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)<0$, то квадратные трёхчлены $x^2+p_1x+q_1$ и $x^2+p_2x+q_2$ имеют вещественные корни, причём между двумя корнями каждого из них лежит корень другого. Докажите это. *И.Ф.Шарыгин. V Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №6–1972*

107. а) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ..., на стороне A_nA_1 — точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке. Докажите равенство

$$A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot\ldots\cdot A_nB_n = A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot\ldots\cdot A_nD_n.$$

б) Для треугольника верно и обратное утверждение: если на стороне A_1A_2 выбраны точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, а на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1, причём $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B_3 = A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot A_3D_3$, а четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$ — параллелограммы, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекаются в одной точке. Докажите это.

В.Л.Гутенмахер. V Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №6–1972*

108. а) Прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник. Докажите это.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

Ю.И.Ионин. V Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №7–1972. Комментарий — на странице 60 этого же номера*

109. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешено одновременно поменять знак на противоположный в любых последовательных а) шести; б) четырёх; в) трёх вершинах многоугольника. Докажите, что при помощи таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

V Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №7–1972. Комментарий — на странице 60 этого же номера*

110. Несколько клеток бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены. Докажите, что из листа можно вырезать несколько квадратов так, что все окрашенные клетки окажутся в вырезанных квадратах и при этом в любом вырезанном квадрате площадь окрашенных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади этого квадрата. *Г.В.Розенблюм. V Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №8–1972*

111*. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34. (Можете считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков прямых и дуг окружностей. Постарайтесь получить более точную оценку. Докажите аналогичную теорему в пространстве.) *Г.В.Розенблюм.* *Решение — в №8–1972*

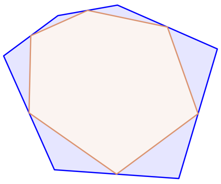
112. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не менее $(n + m - 1)$ чисел. *Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №8–1972*

113. Для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n. Докажите это. (Например, 2 делится на 2, число 12 делится на 4, на 8 делится число 112, а на 16 делится число 2112.) *Б.М.Ивлев.* *Решение — в №8–1972*

114. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d произведение чисел $a - d$ и $b - c$ отрицательно, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие операции можно проделать лишь конечное число раз.
В.Б.Алексеев. *Решение — в №8–1972. Статья Л.Д.Курляндчика и Д.В.Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года*

115*. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешено перелить столько воды, сколько в нём уже содержится, из любого другого сосуда. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)
Г.А.Гальперин, А.Г.Ширшов и Л.Г.Лиманов. *Решение — в №8–1972 и на странице*

116. а) Если соединены середины последовательных сторон выпуклого многоугольника, то периметр полученного многоугольника не меньше половины периметра исходного многоугольника. Докажите это.



б) Если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника, где $n > 3$, то площадь полученного многоугольника не меньше половины площади исходного многоугольника. Докажите это. *Г.А.Гальперин.* *Решение — в №8–1972. Комментарий — на странице 80 этого же номера*

117. Несколько человек в течение t минут наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут? Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений t, например, для $t = 2{,}5$.
Н.Н.Константинов. *Решение — в №8–1972*

118. С четырёх сторон шахматной доски размером $n \times n$ построена кайма шириной в 2 поля. Докажите, что кайму можно обойти шахматным конём, побывав на каждом поле один и только один раз, в тех и только тех случаях, когда $n - 1$ кратно 4.
Ю.И. и Ю.Ю.Соркины. *Решение — в №8–1972*

119. Если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки направленный перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону вектор, длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов окажется равна нулю. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №8–1972*

120. В некотором множестве введена операция $*$, которая по каждым двум элементам a и b этого множества вычисляет некоторый элемент $a * b$ этого множества. Для любых элементов a, b и c выполнено равенство $a * (b * c) = b * (c * a)$; кроме того, если $a * b = a * c$, то $b = c$. Докажите, что операция $*$ а) коммутативна, то есть для любых элементов a и b верно равенство $a * b = b * a$; б) ассоциативна, то есть для любых элементов a, b и c верно равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$.
С.А.Яновская. *Решение — в №8–1972. Комментарий — на странице 80 этого же номера*

1972 год

121. Для любых n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое натуральное $k \leqslant n$, что ни одно из чисел a_k, $\frac{a_k+a_{k-1}}{2}$, $\frac{a_k+a_{k-1}+a_{k-2}}{3}$, ..., $\frac{a_k+a_{k-1}+\ldots+a_2+a_1}{k}$ не превосходит среднего арифметического чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите это.
Н.Б.Васильев. *Решение — в №8–1972*

122. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны соответственно p, q и r. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.
Н.Б.Васильев. Вступительный экзамен 1971 года физического факультета МГУ. *Решение — в №8–1972*

123.* Найдите все такие натуральные числа m, что произведение факториалов первых m нечётных натуральных чисел равно факториалу суммы первых m натуральных чисел: $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(2k-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!$.
В.П.Бешкарев. *Решение — в №9–1972*

124. а) Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, обладающую следующим свойством: для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны AB и BC треугольника в точках K и L соответственно, сумма отношений AK/KB и CL/LB равна 1.

б) Если p и q — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника ABC существует такая точка O, что $p\frac{AK}{KB} + q\frac{CL}{LB} = 1$ для любой прямой KL, проходящей через эту точку (K лежит на AB, L — на BC). Докажите это.
Десятиклассник Г.Нотен и Л.Г.Макаров. *Решение — в №9–1972*

125.* а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством: ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трёх чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешено включать только нечётные числа. (Вот пример такого набора из четырёх чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трёх чисел 3, 5, 7 сумма $5+7$ делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма $107+5$ делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма $7+107$ делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма $3+107$ делится на 5.)
Ю.И.Ионин. *Решение — в №9–1972*

126. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, разрезали на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.
И.Д.Новиков. *Решение — в №10–1972*

127. Для каждого натурального n обозначим через $s(n)$ сумму цифр его десятичной записи. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел m, не представимых в виде $m = n + s(n)$? (Например, $117 = 108 + s(108)$, а число 121, как нетрудно убедиться, в виде $n + s(n)$ не представимо.)
Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1972*

128. Найдите отношения длин сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.
Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1972*

129. а) В ведро налили 12 литров молока. Пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 литров, разделите молоко на две равные части.

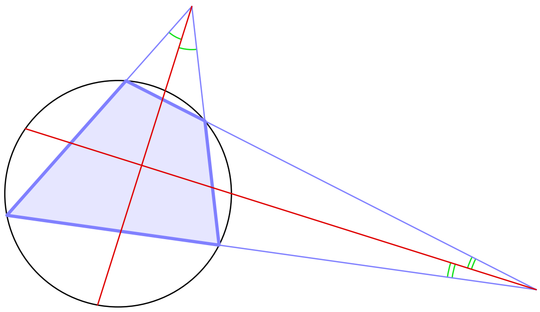
б*) Решите общую задачу: при каких a и b можно разделить пополам $(a+b)$ литров молока, пользуясь лишь сосудами в a литров, b литров и $(a+b)$ литров? (За одно переливание из одного сосуда в другой можно вылить всё, что там есть, или долить второй сосуд до верха.)
В.В.Ушаков и Л.Г.Лиманов. *Решение — в №11–1972*

130. Какое наибольшее число точек можно разместить а) на плоскости; б*) в пространстве так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

Г.А.Гальперин. Решение — в №11–1972. Комментарий — в статье И.М.Яглома «Оценки углов» десятого номера 1973 года

131. Четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырёхугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба. Докажите это.

Десятиклассник М.Уртембаев (Алма-Ата, Казахстан) и Н.Б.Васильев. Решение — в №11–1972



132. По окружности выписаны n чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, каждое из которых равно 1 или -1, причём сумма произведений соседних чисел равна нулю (как в задаче М93) и вообще для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ сумма n произведений чисел, отстоящих друг от друга на k мест, равна нулю (то есть $x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots = 0$, $x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots = 0$ и так далее; например, для $n = 4$ можно взять одно из чисел равным -1, а три других — равными 1).

а) Докажите, что n — квадрат целого числа.

б*) Существует ли такой набор чисел для $n = 16$? (Мы не знаем, при каких n такой набор чисел существует.) *Д.Н.Бернштейн. Решение — в №11–1972*

133. Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль вольвокс — представляет собой сферическую оболочку, сложенную, в основном, семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (то есть клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой «вершине» сходятся три клетки). Бывают экземпляры, у которых есть и четырёхугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (менее чем с пятью и более чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысяч). Объясните этот факт. *В.Маресин. Решение — в №11–1972*

134. Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трёх сторонах AB, BC и AC данного треугольника ABC? *Л.Г.Макаров. Решение — в №11–1972*

135*. Для каждого натурального $n > 1$ существует такое число c_n, что для любого x верно равенство

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = c_n \sin nx.$$

Докажите это и найдите величину c_n. *В.Маресин и И.Н.Бернштейн. Решение — в №12–1972*

136. Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг (массы составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 кг), на семи трёхтонках? *В.П.Федотов. Решение — в №12–1972*

137. Пусть a, b, c, d — длины четырёх последовательных сторон четырёхугольника, S — его площадь. Докажите неравенства: а) $S \leqslant ab + cd$; б) $S \leqslant ac + bd$.

в) Если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырёхугольник можно вписать в окружность. Докажите это. *Н.Б.Васильев. Решение — в №12–1972*

138. Пусть m и n — натуральные числа, причём $m < n$. Докажите равенство

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где C_n^k — это коэффициент при x^k после раскрытия скобок и приведения подобных в многочлене $(1+x)^n$. Например, если $n = 4$, то $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$ и $C_4^4 = 1$; как легко убедиться,

$$\begin{gathered}-1\cdot 4 + 2\cdot 6 - 3\cdot 4 + 4\cdot 1 = 0,\\ -1^2\cdot 4 + 2^2\cdot 6 - 3^2\cdot 4 + 4^2\cdot 1 = 0,\\ -1^3\cdot 4 + 2^3\cdot 6 - 3^3\cdot 4 + 4^3\cdot 1 = 0.\end{gathered}$$

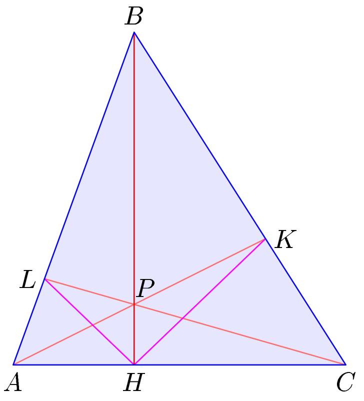
М.И.Сидоров и Н.Б.Васильев. *Решение — в №12–1972 и в статье В.Н.Вагутена «Числа сочетаний, многочлены, последовательности» второго номера 1973 года*

139. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Выразите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH через длины отрезков $KH = a$ и $BD = b$. *Ф.А.Бартенев.* *Решение — в №12–1972*

140. С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешено проделывать следующие операции: А) приписать на конце цифру 4; Б) приписать на конце цифру 0; В) разделить на 2 (если число чётно). (Например, если с числом 4 проделаем последовательно операции В, В, А и Б, то получим число 140.)

а) Из числа 4 получите число 1972.

б*) Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число. *А.К.Толпыго.* *Решение — в №12–1972*



141. Выберем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P. Пусть K — точка пересечения прямых AP и BC, L — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что отрезки KH и LH составляют равные углы с высотой BH. *Е.В.Саллинен.* *Решение — в №1–1973*

142. а) Нельзя занумеровать рёбра куба числами 1, 2, ..., 11, 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же. Докажите это.

б*) Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1, 2, ..., 12, 13 и оставшимися занумеровать рёбра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

Н.Б.Васильев и Н.Н.Константинов. *Решение — в №1–1973 и на странице 62 этого же номера*

143. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполнено следующее условие: если число p простое и n делится на $(p-1)$, то n делится на p.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №1–1973*

144*. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α и β, чтобы прямоугольник размером $a\times b$ можно было разрезать на прямоугольники размером $\alpha\times\beta$. Например, можно ли прямоугольник размером 50×60 разрезать на прямоугольники размером а) 20×15; б) 5×8; в) $6{,}25\times 15$; г) $(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})$? *А.Т.Колотов.* *Статья «Об одном разбиении прямоугольника» первого номера 1973 года*

145. Хозяин обещает работнику платить в среднем корень из двух рублей в день. Для этого каждый день он платит 1 или 2 рубля с таким расчётом, чтобы для любого натурального n выплаченная за первые n дней сумма была натуральным числом, наиболее близким к произведению корня из двух и числа n. Вот величины первых пяти выплат: 1, 2, 1, 2, 1. Докажите, что последовательность выплат непериодическая. *А.К.Толпыго.* Решение — в №1–1973

146. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены чёрные и белые фишки. Докажите, что есть 3 фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в*) Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное верно, а для каких — нет. *А.Романов.* Решение — в №2–1973

147. Вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$ таков, что касательные к окружности в точках A и C пересекаются на продолжении диагонали BD. Докажите, что а) касательные в точках B и D пересекаются на продолжении диагонали AC; б) биссектрисы внутренних углов A и C четырёхугольника пересекаются на диагонали BD, а биссектрисы углов B и D — на AC. *И.Ф.Шарыгин.* Решение — в №2–1973

148. Последовательность x_0, x_1, x_2, ... определена следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, для любого $n > 1$ выполнено равенство

$$(\alpha+\beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1}\beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2}\beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n.$$

Здесь α, β, λ — заданные положительные числа. Найдите x_n и выясните, при каком n величина x_n наибольшая. *А.Л.Лопшиц.* Решение — в №2–1973

149. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если равны периметры треугольников

а) ABC, BCD, CDA и DAB, то $ABCD$ — прямоугольник;

б) ABO, BCO, CDO и DAO, то $ABCD$ — ромб. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №2–1973

150*. P и Q — подмножества множества выражений вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_1, a_2, ..., a_n — натуральные числа, не превосходящие данного числа k (очевидно, таких выражений всего k^n штук). Для любого элемента $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ множества P и любого элемента $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ множества Q существует хотя бы одно такое число m, что $1 \leqslant m \leqslant n$ и $p_m = q_m$. Докажите, что хотя бы одно из множеств P и Q состоит не более чем из k^{n-1} элементов для а) $k = 2$ и любого натурального n; б) $n = 1$, 2 или 3 и любого натурального $k > 1$; в) произвольного натурального n и произвольного не равного 1 натурального числа k. *В.Б.Алексеев.* Решение — в №2–1973

151. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку. *Б.М.Ивлев. Всесоюзная олимпиада.* Решение — в №3–1973

152. a, b, m, n — натуральные числа, причём числа a и b взаимно просты и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.
Д.Ю.Григорьев. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №3–1973

153*. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет её по своему усмотрению вместо одной из звёздочек в следующей разности: **** — — ****. Затем первый называет ещё одну цифру, второй ставит её, первый опять называет цифру, и так играют до тех пор, когда все звёздочки будут заменены цифрами. Первый стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что

а) второй может расставлять цифры так, чтобы полученная разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй.

Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №3–1973*

154. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

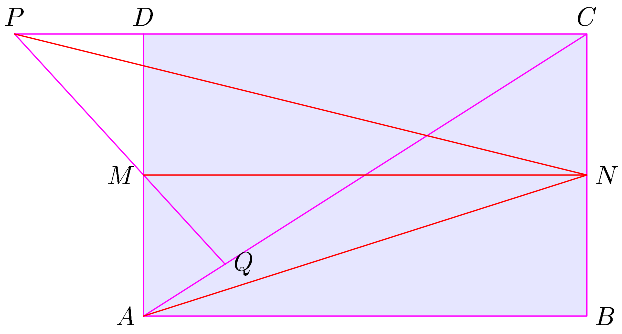
- некоторые 8 из этих отрезков имеют общую точку;
- некоторые 8 из этих отрезков таковы, что никакие два из них не пересекаются.

А.Г.Харазишвили и Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №3–1973. Статья А.В.Спивака «Цепи и антицепи» пятого номера 2003 года*

155*. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

Г.А.Гальперин. Всесоюзная олимпиада. *Статья Н.Б.Васильева и Г.А.Гальперина «Упаковка квадратов» четвёртого номера 1973 года*

156. Точки M и N — середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$. На продолжении отрезка DC за точку D лежит точка P. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q. Докажите равенство углов QNM и MNP. *Ю.В.Михеев и Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1972 года.* *Решение — в №4–1973*



157. Сумма n положительных чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n равна 1. Пусть S — наибольшее из чисел $\frac{x_1}{1+x_1}$, $\frac{x_2}{1+x_1+x_2}$, ..., $\frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}$. Найдите наименьшее возможное значение S. При каких значениях x_1, x_2, x_3, ..., x_n оно достигается?

Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада 1972 года. *Решение — в №4–1973*

158. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней её строке написано одно только натуральное число $a > 1$, а далее под каждым числом k слева пишем число k^2, а справа — число $k+1$. Докажите, что в каждой строке таблицы все числа разные. Например, при $a = 2$ вторая строка состоит из чисел 4 и 3, третья — из чисел 16, 5, 9 и 4, четвёртая — из чисел 256, 17, 25, 6, 81, 10, 16 и 5.

Всесоюзная олимпиада 1972 года. *Решение — в №4–1973*

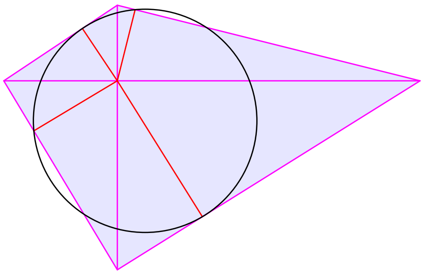
159*. Можно ли расставить цифры 0, 1 и 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером 100×100 таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике размером 3×4, стороны которого идут по сторонам клеток, были бы три нуля, четыре единицы и пять двоек? *В.Е.Лапицкий и Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада 1972 года.* *Решение — в №4–1973*

160*. Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из той же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечётное число очков. Докажите, что в турнире участвовало чётное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.)

Г.А.Каспаров и Б.Макаревич. Всесоюзная олимпиада 1972 года. *Решение — в №5–1973*

161. Озеро имеет форму невыпуклого n-угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо является внутренностью некоторого выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$. *И.Н.Бернштейн. Решение — в №5–1973*

162. Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ такова, что каждое натуральное число либо принадлежит ей, либо представимо в виде суммы двух членов последовательности, быть может, одинаковых. Докажите для любого натурального n неравенство $a_n \leqslant n^2$.
Девятиклассник Ю.Г.Ерошкин. Решение — в №5–1973



163. Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности. Докажите это. *И.А.Кушнир и Н.Б.Васильев. Решение — в №5–1973*

164. На белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость, записаны какие-то числа так, что для каждой чёрной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках — справа и слева,— равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках — сверху и снизу. Известно число, стоящее в одной клетке n-й строки (голубой крестик на рисунке), а требуется узнать число, стоящее над ним в $(n+2)$-й строке (красный знак вопроса на рисунке). Сколько ещё чисел, стоящих в двух нижних строках (голубые точки на рисунке), нужно для этого знать? *М.Л.Гервер. Решение — в №5–1973*

165*. На окружности расположено множество F точек, состоящее из 100 дуг. При любом повороте R окружности множество $R(F)$ имеет хотя бы одну общую точку с множеством F. (Другими словами, для любого угла α от $0°$ до $180°$ в множестве F можно указать две точки, отстоящие одна от другой на угол α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество F? Каков будет ответ, если дуг не 100, а n? *Ю.П.Лысов. Решение — в №6–1973*

166. а) Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше $2/5$ общего числа участников этого похода, во втором — тоже меньше $2/5$. Каждый из учеников участвовал по крайней мере в одном походе. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $4/7$ общего числа учеников.

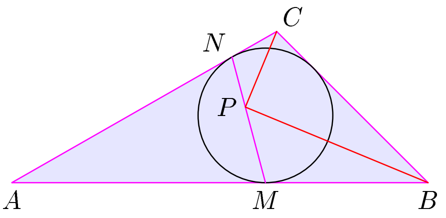
б) Пусть в k-м походе, где $1 \leqslant k \leqslant n$, мальчики составляли α_k-ю часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто участвовал хотя бы в одном из n походов)? *Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1973*

167. В любой арифметической прогрессии a, $a+d$, $a+2d$, $\ldots$, $a+nd$, $\ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа. Докажите это. *Дж.Пойа и Ю.Соркин. Решение — в №6–1973 и на странице 48 двенадцатого номера 1973 года*

168. В правильной усечённой пирамиде точка K — середина некоторой стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания. Докажите равенство длин проекций отрезков AB и CD на прямую KL.
Г.Нотен. Решение — в №6–1973

169. Пусть k и n — натуральные числа, $k \leqslant n$. Расставьте первые n^2 натуральных чисел в таблицу $n \times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.
Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1973

170. а) Пусть M и N — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами AB и AC соответственно, P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC прямой.

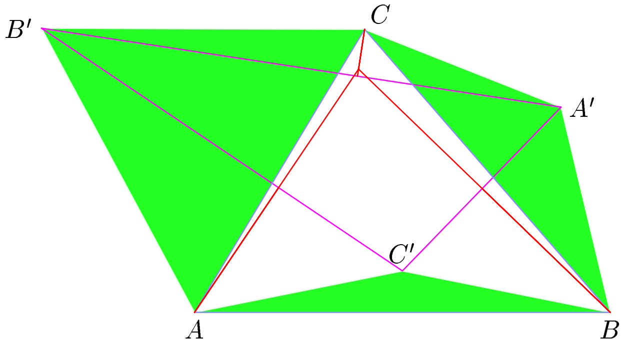


б) Докажите более общий факт: если расположенная внутри треугольника ABC точка O такова, что величина угла BOC на 90° больше величины угла BAO, точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, а P — точка пересечения прямых BO и MN, то угол BPC прямой. *И.Ф.Шарыгин.* *Решение — в №7–1973*

171. На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи одной только линейки постройте отрезок длины $\sqrt{7}$.
А.В.Аляев. *Решение — в №7–1973*

172. Пусть p — простое число. Напишем сначала p единиц, затем p двоек, p троек, p четвёрок, p пятёрок, p шестёрок, p семёрок, p восьмёрок и p девяток. Докажите, что полученное таким образом число при делении на p даёт такой же остаток, что и число 123 456 789. *М.Л.Гервер.* *Решение — в №7–1973*

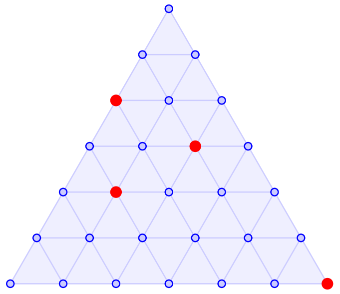
173*. В квадратной таблице 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 16 так, что сумма четырёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причём числа 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, одна и та же.
Л.Г.Лиманов. *Решение — в №7–1973*



174. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены равнобедренные треугольники $AB'C$, $BA'C$ и $AC'B$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$, пересекаются в одной точке. *А.Г.Гейн.* *Статья И.Ф.Шарыгина «Об одном геометрическом месте точек» восьмого номера 1973 года*

175*. Для каждого данного натурального m найдите такое наибольшее число N, что возможна следующая ситуация.

а) Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на m равных частей; через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам и разрезавшие треугольник на m^2 маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников отмечены N вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не параллелен ни одной из сторон (на рисунке $m=6$ и $N=4$).



б) Каждое ребро тетраэдра разбито на m равных частей; через точки деления проведены плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отмечены N вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежат на прямой, параллельной одной из граней.

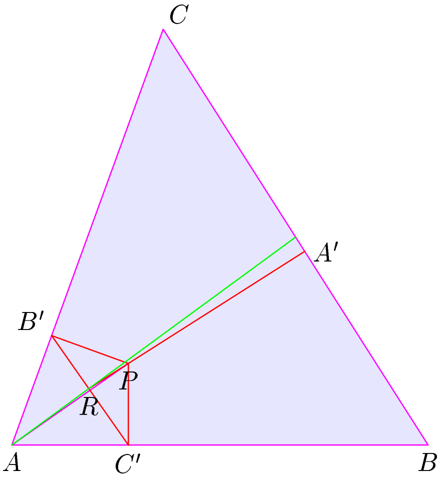
в) Среди решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k=m$ в целых неотрицательных числах выбраны N решений так, что ни в каких двух из выбранных решений ни одна переменная не принимала одно и то же значения.

Примечание. Задачи а) и б) являются частными случаями задачи в) при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно.
М.Л. Гервер. *Решение — в №8–1973*

176. К какой стороне треугольника ABC ближе всего расположена точка пересечения его высот, если $\angle A < \angle B < \angle C$? А к какой вершине?
Девятиклассник Л. Шнайдер. *Решение — в №8–1973*

177. Пусть a — заданное вещественное число, n — натуральное число, $n > 1$. Решите уравнение $\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a$.
Т. Темиров. *Решение — в №8–1973*

178. Из некоторой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC опустим перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.
И.Ф. Шарыгин. *Решение — в №8–1973*



179. Для каждого непрямоугольного треугольника T обозначим через T_1 треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T; через T_2 — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; аналогично определим треугольники T_3, T_4 и так далее. Каким должен быть треугольник T, чтобы а) треугольник T_1 был остроугольным; б) в последовательности $T_1, T_2, T_3, \ldots$ встретился прямоугольный треугольник T_n (и таким образом треугольник T_{n+1} не был определён)? в) треугольник T_3 был подобен треугольнику T?

г*) Для каждого натурального числа n выясните, сколько существует неподобных друг другу треугольников T, для которых треугольник T_n подобен треугольнику T.
Н.Б. Васильев. *Решение — в №9 и №12–1973*

180*. Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число n, а другой задаёт вопросы типа «верно ли, что n не меньше x» (число x он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии T второго игрока сопоставим функцию $f_T(n)$, равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число n. Пусть, например, стратегия T состоит в том, что сначала задают вопросы: «верно ли, что $n \geqslant 10$?», «верно ли, что $n \geqslant 20$?», ... до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что $n \geqslant 10(k+1)$?» не будет получен ответ «нет», а затем задают вопросы «верно ли, что $n \geqslant 10k+1$?», «верно ли, что $n \geqslant 10k+2$?» и так далее. Тогда $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$, где a — последняя цифра числа n, то есть $f_T(n)$ растёт примерно как $n/10$.

а) Предложите стратегию, для которой функция f_T растёт медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно для произвольной стратегии T вместо функции f_T ввести функцию $\overline{f}_T = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_T(k)$. Оцените снизу $\overline{f}_T$ для произвольной стратегии T.
Я.М. Бардзинь и А.Л. Тоом. *Решение — в №9–1973*

1973 год

181. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать её нельзя.)

Л.Г.Лиманов. *Решение — в №9–1973*

182. Докажите, что если

а) a, b и c — положительные числа, то $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$;

б) a, b, c и d — положительные числа, то $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}$;

в) a_1, a_2, …, a_n — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Л.Г.Лиманов. *Решение — в №9–1973 и в статье М.Горелова «О пользе графиков» третьего номера 2010 года. Комментарий — в задаче М915*

183. Найдите высоту трапеции, длины оснований которой равны a и b, где $a < b$, величина угла между диагоналями равна 90°, а величина угла между продолжениями боковых сторон — 45°.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №9–1973*

184*. Докажите тождество $\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

Г.Е.Есипенко. *Решение — в №10–1973; статья Н.Б.Васильева «Числа сочетаний, последовательности и многочлены» второго номера 1973 года; статья Л.Курляндчика и А.Лисицкого «Как придумать комбинаторное тождество?» пятого номера 1980 года*

185*. На кафтане площади 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше 1/2. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/5.

Е.Б.Дынкин. *Решение — в №10–1973 и статья И.М.Яглома «Заплаты на кафтане» второго номера 1974 года*

186. Решите уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ в целых числах.

Десятиклассник В.Слепченко. *Решение — в №10–1973*

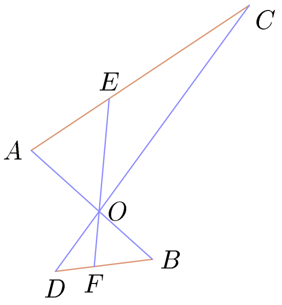
187. На плоскости заданы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C треугольника ABC, у которого: а) высота AA' равна стороне BC; б) медиана AA_1 равна стороне AC; в) медиана AA_1 равна стороне BC; г) высота CC' равна медиане BB_1; д) высота BB' равна медиане CC_1.

М.А.Квантов и Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1973*

188. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые $n-1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками). Укажите все случаи, когда связность нарушается при отмене n рейсов. *А.К.Кельманс и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №10–1973*

189. Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причём точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что отрезок EF короче хотя бы одного из отрезков AB или CD.

Д.Ю.Григорьев. *Решение — в №10–1973; окончание решения — на странице 80 этого же номера. Статья Б.Каневского и Э.Линденштрауса «Площадь сечения тетраэдра» шестого номера 2004 года*



190*. На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. В точке A_1, находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b, сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, …, руководствуясь следующими правилами. Во-первых, точки A_1, A_2, A_3, ... лежат на прямой a, точки B_1, B_2, B_3, ... — на прямой b. Во-вторых, $1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \ldots$ В-третьих, наконец, точка A_n не совпадает с A_{n+1}, кроме случая $A_nB_n \perp a$ (аналогично, B_n совпадает с B_{n+1}, только если $B_nA_{n+1} \perp b$). Нетрудно видеть, что этими тремя условиями последовательность прыжков определена однозначно.

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусом, то путь блохи будет периодическим, то есть в некоторый момент она попадёт в начальную точку A_1 и затем будет последовательно проходить те же самые точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... , как в начале пути; а если угол измеряется иррациональным числом градусов, то блоха не попадёт ни в какую точку более двух раз. *Н.Б.Васильев. Статья «Последовательность прыжков» одиннадцатого номера 1973 года*

191. На плоскости даны точки A и B и прямая l, проходящая через точку A и не проходящая через точку B. Через точки A и B проведём произвольную окружность. Пусть O — её центр, C — точка её пересечения с прямой l, отличная от A. Где может располагаться середина отрезка OC?

Девятиклассник П.Парамонов. Решение — в №11–1973

192. Даны числа 1, 2, 3, ... , 1000. Найдите наибольшее число m, обладающее таким свойством: какие бы m из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся $1000 - m$ чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

Н.Б.Васильев. Решение — в №11–1973

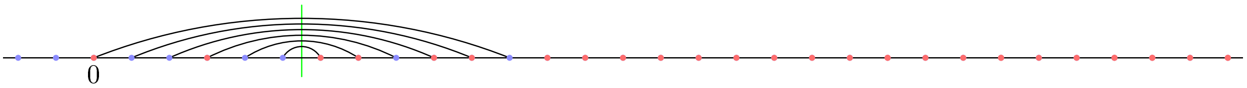
193*. Сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника. Докажите это.

Н.Б.Васильев. Решение — в №11–1973; статья А.Лопшица «Задача Мёбиуса и её продолжение» третьего номера 1977 года

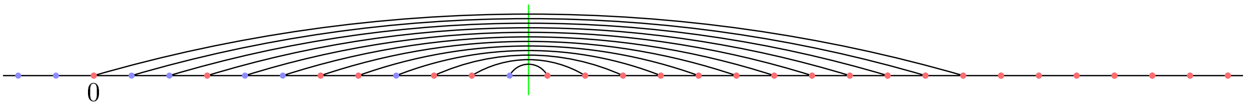
194. Пусть натуральные числа a и b взаимно просты. Одна из важнейших теорем арифметики гласит, что всякое целое число представимо в виде $ax + by$, где x и y — целые неотрицательные числа. Рассмотрим множество M целых чисел, представимых в виде $ax + by$, где x и y — целые неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее целое число c, не принадлежащее множеству M?

б) Из двух чисел n и $c - n$ (где n — любое целое) одно принадлежит M, а другое нет. Например, для $a = 3$ и $b = 7$ на рисунке синим цветом отмечены числа, принадлежащие множеству M, красным — не принадлежащие; при симметрии относительно числа 5,5 красные числа переходят в синие, а синие — в красные:



То же самое видим для $a = 4$ и $b = 9$ при симметрии относительно числа 11,5:



А.А.Кириллов. Решение — в №11–1973. Статья А.В.Спивака «Алгоритм Евклида» приложения к четвёртому номеру 2007 года

195*. Дан треугольник ABC. Сколько существует таких точек D, что периметры четырёхугольников $ABCD$, $ABDC$ и $ADBC$ одинаковы, то есть таких точек D, что $AD + BC = BD + AC = CD + AB$? *М.Л.Гервер. Статья «Сюрпризы» первого номера 1974 года*

196. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Каждый диаметр пересекает не более k хорд. Докажите, что сумма длин хорд меньше πk.

А.Т.Колотов. *Решение — в №12–1973*

197. В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов записаны mn положительных чисел. Найдём в каждом столбце произведение чисел и сложим все n таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма аналогичных произведений будет не меньше, чем в первоначальной. Решите эту задачу для а) $m = n = 2$; б) $m = 2$ и произвольного n; в*) любых натуральных m и n.

Вот пример для $m = 3$ и $n = 4$. Для таблицы

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

произведения равны $1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$, $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, $6 \cdot 7 \cdot 1 = 42$ и $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Сумма этих произведений равна $4 + 30 + 42 + 8 = 84$. А если переставим числа в строках в порядке возрастания, то получим таблицу

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Сумма произведений $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ и $6 \cdot 7 \cdot 2 = 84$ равна $126 > 84$.

Б.М.Макаревич. *Решение — в №12–1973*

198. $ABCD$ — параллелограмм. На прямых AB и BC выбраны точки H и K соответственно так, что $KA = AB$ и $HC = CB$. Докажите равенство $KD = DH$.

В.Л.Гутенмахер. *Решение — в №12–1973*

199. Для любого натурального n докажите равенства:

а) $C_n^0 - \frac{C_{n-1}^1}{4} + \frac{C_{n-2}^2}{4^2} - \ldots + \frac{(-1)^k C_{n-k}^k}{4^k} + \ldots = \frac{n+1}{2^n}$, где сумма берётся по всем целым неотрицательным k, не превосходящим $n/2$;

б*) $C_n^0 - pqC_{n-1}^1 + p^2q^2C_{n-2}^2 - \ldots + (-1)^k p^k q^k C_{n-k}^k + \ldots = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$, где $p + q = 1$ и $p \neq q$, а сумма, аналогично пункту а), берётся по всем целым неотрицательным k, не превосходящим $n/2$.

Д.А.Фридкин и Л.Г.Лиманов. *Решение — в №12–1973*

200. а) На первом рисунке изображены шесть точек, которые лежат по три на четырёх прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отобразились в три точки, лежащие на одной прямой.

б) На втором рисунке девять точек лежат по три на девяти прямых, причём через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отобразилась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображённой на третьем рисунке.

А.Н.Колмогоров. *Решение — в №1 и №3–1974*

201. Прямая l_1 пересекает стороны a, b и c треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая l_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.

Нгуен Конг Кви (Ханой). *Решение — в №1–1974*

202. Из последовательности a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $\ldots$, являющейся бесконечной арифметической прогрессией, где d не равно 0, тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение a/d рационально. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1974*

203. а) Если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ на прямые AB, BC, CD и DA соединить последовательно четырьмя прямыми, то получим прямые, касающиеся одной окружности. Докажите это.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1974*

204. Назовём натуральное число *хорошим*, если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1, 9, 7, 3, и плохим — в противном случае. Например, число 197 639 917 — плохое, а 116 519 732 — хорошее. Докажите, что существует такое натуральное число n, что среди всех n-значных чисел (от 10^{n-1} до $10^n - 1$) больше хороших чисел, чем плохих. Постарайтесь найти возможно меньшее такое n.

Г.А.Гуревич. *Решение — в статье Г.А.Гуревича и Ж.М.Раббота «О вероятностях и «хороших» числах» первого номера 1974 года*

205*. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «$+$», а некоторые из остальных — знаком «$-$» и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «$+$» и «$-$».

Замечание. Эти утверждения верны всегда, если количество задач больше количества студентов. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №2–1974*

206. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, можно указать такую группу стоящих подряд цифр последовательности, что записываемое этими цифрами число делится на n. *В.А.Уфнаровский.* *Решение — в №2–1974*

207. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Опишите вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $M_1M_2M_3$ наибольшей площади, подобный треугольнику $B_1B_2B_3$ (при этом вершина A_1 должна лежать на прямой M_2M_3, вершина A_2 — на прямой A_1A_3, вершина A_3 — на прямой A_1A_2). *Н.Д.Нагаев и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №2–1974. Иллюстрация — на второй странице обложки. Комментарий — в статье А.В.Спивака и М.В.Смурова «Неожиданная поворотная гомотетия» пятого номера 1998 года*

208. Разность между наибольшим и наименьшим из чисел x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_9, x_{10} равна 1. Какой а) наибольшей; б) наименьшей может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 чисел x_1, $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\ldots$, $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}$?

в) Каков ответ, если чисел не 10, а n? *В.Б.Пеллер и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №3–1974*

209. Для любого треугольника можно вычислить сумму квадратов тангенсов половин его углов. Докажите, что эта сумма а) меньше двух для любого остроугольного треугольника; б) не меньше 2 для любого тупоугольного треугольника, величина тупого угла которого больше или равна двух арктангенсов числа 4/3; в) среди треугольников с тупым углом, меньшим двух арктангенсов 4/3, имеются и такие, сумма квадратов тангенсов половин углов которых больше двух, и такие треугольники, сумма квадратов тангенсов половин углов которых меньше двух.

М.Л.Гервер. *Решение — в №3–1974. Статья «Сюрпризы» первого номера 1974 года*

210*. Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешено поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных последовательностей?

Г.А.Гуревич. *Решение — в №3–1974*

211. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

Г.Ш.Фридман. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

212. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлены 14 монет. Эксперт знает, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причём он выяснил, какие именно фальшивые, а какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно фальшивые, а остальные — настоящие. Сможет ли он это сделать?

Р.В.Фрейвальд и А.Л.Тоом. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

213. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведён луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите равенство $OK = KB$.

Е.В.Саллинен. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

214. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет вещественных корней.

Ю.И.Ионин. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

215*. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашены в чёрный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трёх клеток: самой клетки K и её соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то K становится белой, если две или три из них были чёрными,— то чёрной). Докажите следующие утверждения.

а) Через конечное время на листе не останется ни одной чёрной клетки.

б) Чёрные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

А.Л.Тоом. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

216. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

Г.А.Гальперин. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

217. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Докажите, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь многоугольника пополам.

Е.В.Саллинен. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №4–1974*

218. Если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то

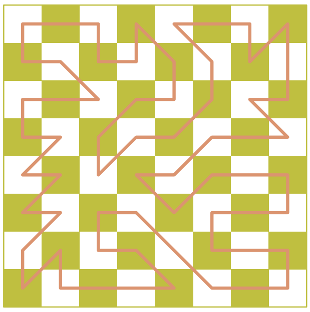
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

Докажите это. *Б.Д.Гинзбург, В.Л.Рабинович и В.Л.Гутенмахер. VII Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №4 и на странице 45 одиннадцатого номера 1974 года*

219. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

Н.Б.Васильев. VII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №5–1974*

220. Король обошёл шахматную доску, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице.) *А.В.Климов. VII Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №5–1974. Статья И.Ф.Акулича «Прогулки короля» третьего номера 2000 года. Статья Н.Б.Васильева «Вокруг формулы Пика» двенадцатого номера 1974 года*



221. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние до границы кляксы, а также наибольшее расстояние до границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выберем наибольшее, а среди наибольших — наименьшее. Какую форму имеет клякса, если эти две величины равны? *Восьмиклассник А.Я.Блох.* *Решение — в №5–1974*

222. У любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон. Докажите это. *А.Грюнталь и Г.А.Гальперин.* *Решение — в №6–1974*

223. Натуральное число называют совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть квадратом.

Девятиклассник А.Макаричев. *Решение — в №6–1974*

224. У трёхгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что углы между этими биссектрисами либо все три тупые, либо все острые, либо все прямые.

Э.Г.Готман. *Решение — в №6–1974*

225. Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50×50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через своё ребро на соседнюю клетку; при этом разрешено двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее? *Г.А.Гальперин.* *Решение — в №6–1974*

226. В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвёртую вершину исходного квадрата?

Ю.И.Ионин. *Решение — в №6–1974. Статья Н.Б.Васильева «Вокруг формулы Пика» двенадцатого номера 1974 года*

227. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма. *Е.В.Саллинен.* *Решение — в №6–1974*

228. Лист клетчатой бумаги размером $n\times n$ раскрасили в n цветов (каждую клетку покрасили в один из этих цветов или не закрасили вообще). Правильной называем раскраску, при которой ни в одной строке и ни в одном столбце нет клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально правильно закрашены а) n^2-1; б) n^2-2; в) n клеток? *Д.Логачёв.* *Решение — в №6–1974*

229*. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по сторонам. Максимальная скорость полицейского равна u, а гангстера — v. Цель полицейского — оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что если а) $3u > v$, то он может добиться своей цели; б) $3u < v$, то гангстер может помешать ему это сделать. *А.Белкин, Г.А.Гальперин и А.Б.Ходулёв.* *Решение — в №6–1974*

230. Из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника. Докажите это. *С.В.Конягин и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №6–1974*

231. Решите в натуральных числах уравнение $n^x+n^y=n^z$. *Девятиклассник Р.Егорян.* *Решение — в №7–1974*

232*. а) К любому конечному множеству точек плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить ещё одну точку так, что это свойство сохранится. Докажите это.

б) Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек плоскости? *П.С.Панков.* *Решение — в №7–1974*

233*. В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее 1973 раза. Сколько раз будет написано число 1973? *Г.А.Гальперин и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №7–1974. Статья «Близкие дроби» восьмого номера 1975 года*

234. Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют $1/3$ их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по $1/3$ соответствующих сторон 8-угольника, и так далее. Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам). *Девятиклассник С.В.Конягин.* *Решение — в №7–1974*

235*. По арене круглого цирка радиусом 10 м бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма величин всех углов, на которые он поворачивал, не меньше 2998 радиан. *И.Н.Бернштейн.* *Решение — в №7–1974*

236. а) Имеется 51 двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере 6 чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.

б) Даны натуральные числа k и n, причём $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из этих выбранных ладей не били одна другую? *А.Ю.Сойфер и С.Г.Слободник.* *Решение — в №8–1974*

237. Величины углов остроугольного треугольника равны α, β и γ. Какие массы нужно поместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трёх масс попал в а) ортоцентр (точку пересечения высот); б) центр описанной окружности?

Длины сторон треугольника равны a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал в в) точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью; г) центр вписанной окружности? *Б.Д.Гинзбург.* Решение — в №8–1974

238*. Для любого натурального числа n сумма чисел сочетаний из n по 1, по 3, по 5, . . . , умноженных соответственно на 1, на 1973, на 1973^2, . . . , делится на $2^n - 1$. Докажите это. *Ф.Г.Шлейфер и Л.Г.Лиманов.* Решение — в №8–1974

239. На плоскости даны две точки A и B. Пусть C — некоторая точка плоскости, равноудалённая от точек A и B. Построим последовательность точек $C_1 = C$, C_2, C_3, . . . , C_n, C_{n+1}, . . . , где C_{n+1} — центр описанной окружности треугольника ABC_n. При каком положении точки C а) точка C_n попадёт в середину отрезка AB (при этом C_{n+1} и дальнейшие члены последовательности не определены)? А при каком положении точки C точка C_n совпадает с C?
Десятиклассник Н.Чернов (Кривой Рог) и Н.Б.Васильев. Решение — в №8–1974

240. По заданному ненулевому x значение x^8 можно найти за три арифметических действия: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$, а x^{15} — за пять действий: первые три — те же самые, затем $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$ и $x^{16} : x = x^{15}$. Докажите, что

а) x^{1000} можно найти за 12 действий (умножений и делений);

б*) для любого натурального n возвести x в n-ю степень можно не более чем за $1 + \frac{3}{2}\log_2 n$ действий. *Э.Г.Белага.* Решение — в №8–1974

1974 год

241. Сумма $3^{1974}+5^{1974}$ делится на 13. Докажите это. *С.И.Мейзус.* *Решение — в №9–1974*

242. Пусть A_kH_k и A_kM_k, где $k=1$, 2 или 3,— соответственно, высота и медиана, проведённые из вершины A_k остроугольного треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что одно из трёх произведений $H_1M_1\cdot A_2A_3$, $H_2M_2\cdot A_3A_1$ и $H_3M_3\cdot A_1A_2$ равно сумме двух других. Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольников? *Десятиклассник С.Сальников (город Мары) и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №9–1974*

243. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой и проходит через точку G, не лежащую на данных двух прямых и являющуюся центром тяжести единичных масс, помещённых в точки A_1, A_2, ..., A_n. Докажите равенство

$$\frac{A_1G}{GB_1}+\frac{A_2G}{GB_2}+\ldots+\frac{A_nG}{GB_n}=n.$$

А.М.Лопшиц и Б.Д.Гинзбург. *Решение — в №9–1974*

244. Даны две последовательности a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n. Докажите неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqslant n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n),$$

если для любых i и j

а) из неравенства $a_i<a_j$ следует неравенство $b_i\leqslant b_j$;

б) из неравенств $a_i<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}<a_j$ следует неравенство $b_i\leqslant b_j$.
Десятиклассник А.А.Григорян (Баку) и Л.Г.Лиманов. *Решение — в №9–1974*

245*. Предлагается построить N точек на плоскости так, чтобы все расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для любых двух точек M_i и M_j, где i и j — любые числа от 1 до N, расстояние M_iM_j должно равняться r_{ij}.

а) Можно ли провести построение, если расстояния r_{ij} заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?

в) Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее k, для которого возможность построения любых k из данных N точек обеспечивает возможность построения и всех N точек?
М.Л.Гервер. *Решение — в №9–1974*

246. На плоскости даны две прямые m и n и точка O. Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых m и n, а центр описанной окружности находится в точке O. *Ю.А.Грязнов.* *Решение — в №10–1974*

247. Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, из которых k имеют форму уголка, а остальные $(12-k)$ — прямоугольника размером 1×3. При каких k это возможно? *Э.Туркевич и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №10–1974*

248. В выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$ площади P. (Вершина B_k лежит на стороне A_kA_{k+1} для любого $k=1$, 2, …, $n-1$, а вершина B_n — на стороне A_nA_1.) Около того же n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ описан n-угольник $C_1C_2\ldots C_n$ площади Q. (Вершина A_k лежит на стороне C_kC_{k+1} для любого $k=1$, 2, …, $n-1$, а вершина A_n — на стороне C_nC_1.) Если $C_1C_2 \parallel B_1B_2$, $C_2C_3 \parallel B_2B_3$, …, $C_nC_1 \parallel B_nB_1$, чему может равняться площадь n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$?
И.А.Кушнир. *Решение — в №10–1974. Статья Н.Б.Васильева «Семейство параллельных n-угольников» одиннадцатого номера 1974 года*

249*. На рёбрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается вписанного в куб шара. Докажите, что величина φ двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M. Найдите величину φ. *И.Ф.Шарыгин.* *Решение — в №10–1974*

250*. а) При дворе короля Артура собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее $n/2$ друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.

б) Докажите, что если у каждого рыцаря одинаковое чётное (и, конечно, положительное) количество друзей, то Мерлин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом. (У Артура есть столики на двоих, на троих и так далее.) *Н.Б.Васильев и В.Л.Гутенмахер.* *Решение — в №10–1974. Статья «Задачи о графах, или Сказка "Иван-царевич и Серый Волк"» одиннадцатого номера 1974 года*

251. Дано n фишек нескольких цветов, причём фишек каждого цвета не более $n/2$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом. *Ф.Г.Шлейфер.* *Решение — в №11–1974*

252. а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник. Его разрешено «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любого круга можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что его центр окажется внутри круга. (Другими словами, для любой точки M и любого положительного числа ε можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его окажется от точки M на расстоянии меньше ε.)

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в) Для каких правильных n-угольников верно аналогичное утверждение?
Г.А.Гальперин. *Статья А.А.Егорова «Решётки и правильные многоугольники» двенадцатого номера 1974 года*

253. На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. По этим данным восстановите треугольник.

Вневписанная окружность — это окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. *Б.В.Мартынов и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №11–1974*

254. Вычислите квадратный корень из числа 0,111 … 111 (100 единиц) с точностью а) 100; б) 101; в*) 200 знаков после запятой. *А.А.Егоров и С.Т.Берколайко.* *Решение — в №11–1974*

255. AB и CD — две различные касательные к двум данным шарам (A и C принадлежат поверхности одного шара, B и D — другого). Докажите, что проекции отрезков AC и BD на прямую, проходящую через центры шаров, равны.
И.Ф.Шарыгин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №11–1974*

256. Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго.

Расстоянием от точки до стороны называем расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона. *А.Н.Чернышёв.* *Решение — в №12–1974*

257. При каких натуральных $n \geqslant 2$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant p(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

выполнено для любых действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, если а) $p = 1$; б) $p = 4/3$; в) $p = 6/5$? *Нгуен Конг Кви, Ханой (Вьетнам).* *Решение — в №12–1974*

258. На плоскости даны три точки K, L, N. Про четырёхугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трёх его сторон лежат в данных точках K, L, N. Найдите множества точек, в которые может попасть: а) середина четвёртой стороны; б) вершина этого четырёхугольника. *А.П.Савин.* *Решение — в №12–1974*

259. Назовём квартетом четвёрку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке нарисованы три квартета.) Какое наибольшее число квартетов можно разместить в а) квадрате 5×5; б) прямоугольнике $m \times n$ клеток?
Десятиклассник А.А.Григорян. *Решение — в №12–1974*

260*. Окружность разбита точками A_1, A_2, ..., A_n на n равных дуг, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги окружности (с концами в точках разбиения) называем одинаково окрашенными, если при некотором повороте окружности одна из них полностью, включая цвета всех дуг, совпадает с другой. (Например, на рисунке дуги A_2A_6 и A_6A_{10} одинаково окрашены.) Докажите, что если для каждой точки разбиения A_k можно указать две непересекающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом A_k, то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, то есть окраска периодическая. Рассмотрите сначала случай, когда красок всего две, скажем красная и чёрная. *Г.А.Гуревич.* *Решение — в №12–1974*

261. Обруч радиусом R, висевший на неподвижном круге радиусом $r < R$, начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиусом $R - r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r. (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.) *С.Г.Гиндикин и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1975*

262. Какое наибольшее количество а) ладей; б) ферзей можно так расставить на шахматной доске, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных? *В.и Л.Рабиновичи, Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1975*

263. Даны числа p и q, большие 1. На сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ возьмём точки P и Q так, что $BC = p \cdot BP$ и $CD = q \cdot DQ$. При каком отношении длин сторон AB и AD угол PAQ будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае $p = 2$ и $q = 3/2$? *Э.Г.Готман.* *Решение — в №1–1975*

264. В городе одна синяя площадь и n зелёных, причём каждая зелёная площадь соединена улицами с синей и с двумя зелёными, как показано на рисунке. На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно проехать и с каждой — уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая правил, доехать до любой из остальных.
Девятиклассник Б.Розенштейн и И.Н.Клумова. *Решение — в №1–1975*

265. Диагональ AC' прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами AB, AD и AA' углы BAC', DAC' и $A'AC'$. Докажите, что сумма величин этих углов меньше 180°.
М.Л.Гервер. Решение — в №1–1975

266. Дан выпуклый n-угольник. Докажите, что если для каждой тройки последовательных

а) вершин n-угольника построить окружность, проходящую через эти вершины, и из n полученных окружностей выбрать ту, радиус которой наибольший, то весь данный n-угольник окажется внутри такой окружности;

б) сторон n-угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из n полученных окружностей выбрать такую, радиус которой наименьший, то она будет содержаться внутри данного n-угольника. *А.В.Карзанов и Л.Г.Лиманов.* Решение — в №1–1975

267. В последовательности троек целых чисел (2,3,5), (6,15,10), ... каждая следующая тройка получена из предыдущей таким образом: первое число умножили на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения образовали новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не является ни квадратом, ни кубом, вообще никакой (отличной от первой) степенью натурального числа. *Ф.А.Бартенев и И.Н.Клумова.* Решение — в №1–1975

268. В углу доски $n \times n$, где $n > 3$, стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конём (на два поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном), а второй — один раз как конём с удлинённым ходом (на три поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится поставить фигуру в противоположный угол, а второй ему мешает. Кто победит при правильной игре?
Десятиклассник П.Кацыло (Москва) и И.Н.Клумова. Решение — в №2–1975

269. Обозначим через $T_k(n)$ сумму произведений по k чисел от 1 до n. (Например, $T_2(4) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4$.)

а) Найдите формулы для $T_2(n)$ и $T_3(n)$.

б) $T_k(n)$ является многочленом от n степени $2k$. Докажите это.

в) Укажите метод нахождения многочленов $T_k(n)$ при $k = 2, 3, 4, \ldots$; примените его для отыскания многочленов $T_4(n)$ и $T_5(n)$. *Э.А.Ясиновый.* Решение — в №2–1975

270. Пусть AB и CD — две хорды окружности, а точки K и H построены так, что углы KAB, KCD, HBA и HDC прямые. Докажите, что прямая KH проходит через центр окружности и точку пересечения прямых AD и BC.
И.Ф.Шарыгин, А.И.Яновский и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1975

271. Для всякого ли натурального n можно расставить первые n натуральных чисел в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, расположенных между ними?
А.И.Плоткин. Всесоюзная олимпиада 1974 года. Решение — в №2–1975

272. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны трапеции, обе боковые стороны которой касаются обеих окружностей, а каждое из оснований касается одной из них.
Е.В.Саллинен и Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада 1974 года. Решение — в №2–1975

273. На отрезке $[0;1]$ задана функция f. Эта функция во всех точках неотрицательна, $f(1) = 1$, а для любых двух неотрицательных чисел x_1 и x_2, сумма которых не превосходит 1, величина $f(x_1 + x_2)$ не превосходит суммы величин $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

а) Для любого числа x отрезка $[0;1]$ докажите неравенство $f(x) \leqslant 2x$.

б) Для любого ли числа x отрезка $[0;1]$ обязательно верно неравенство $f(x) \leqslant 1,9x$?
А.В.Попов. Всесоюзная олимпиада 1974 года. Решение — в №3–1975

274. Найдите наименьшее число вида а) $|11^k - 5^n|$; б) $|36^k - 5^n|$; в) $|53^k - 37^n|$, где k и n — натуральные числа.

Ф.Г.Шлейфер и И.Н.Клумова. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975*

275* а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: длина суммы первых k векторов не превышает 3.

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в пункте а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку и в пункте б).

М.Л.Гервер. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975. Статья «От перемены мест слагаемых ... »*

276. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причём $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ прямой.

Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975*

277. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

А.М.Штейнберг и И.Н.Клумова. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975. Статья Л.Д.Курляндчика и Д.В.Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года*

278. а) Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника больше 1. Обязательно ли длина хотя бы одной из диагоналей больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Обязательно ли длина хотя бы одной из сторон больше 1?

Н.Х.Агаханов. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975*

279. На n карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно 1 или -1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел, если $n > 3$ и за один вопрос разрешено узнать произведение чисел на а) любых трёх карточках; б) любых трёх карточках, лежащих подряд?

Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №3–1975*

280* Точки A', B' и C' — соответственно, середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, площадь которого равна 1. Точки K, L и M лежат на отрезках AB', CA' и BC' соответственно. Какую минимальную площадь может иметь пересечение треугольников $A'B'C'$ и KLM?

Б.М.Ивлев. Всесоюзная олимпиада 1974 года. *Решение — в №4–1975*

281. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, длины всех диагоналей которого одинаковы?

Г.А.Гальперин. *Решение — в №4–1975*

282. В клетках прямоугольной таблицы записаны натуральные числа. За один ход разрешено удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равны нулю.

С.В.Конягин. *Решение — в №4–1975*

283. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые ограничивают многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №4–1975*

284*. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.
С.В.Конягин. Решение — в №4–1975

285*. Прямоугольный лист бумаги разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых длина одной из сторон равна 1. Докажите, что длина хотя бы одной из сторон листа бумаги — целое число. *А.В.Климов и И.Н.Клумова. Решение — в №4–1975*

286. На плоскости расположены n точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости могут оказаться отмеченными? *А.Печковский и С.В.Конягин. Решение — в №5–1975*

287. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух чисел этой последовательности единственным образом? *А.Лившиц и Л.Г.Лиманов. Решение — в №5–1975*

288. На конгрессе собрались учёные, среди которых есть друзья. Никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся учёный, у которого ровно один друг. *С.В.Конягин и С.Ландо. Решение — в №5–1975*

289. N гирь, масса каждой из которых — целое число граммов, разложены на k равных по массе куч. Докажите, что можно не менее чем k разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся $(N-1)$ гири уже нельзя будет разложить на k равных по массе куч. *С.В.Конягин. Решение — в №5–1975*

290. Для каких n существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из n звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит ещё хотя бы одно её звено? *С.В.Конягин и С.Ландо. Решение — в №5–1975*

291. На сторонах A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами O_1, O_2 и O_3 соответственно. Докажите, что

а) отрезки O_1O_2 и A_3O_3 равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков A_3A_1, O_1O_2, A_3A_2 и A_3O_3 являются вершинами квадрата;

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром O_3.

В.М.Фишман. Статья «Решение задач с помощью геометрических преобразований» седьмого номера 1975 года

292. На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешено стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После 49-кратного повторения указанной процедуры на доске останется одно число. Какое это может быть число?
Ф.Г.Шлейфер. Решение — в №6–1975

293. Рассмотрим треугольник OC_1C_2. Проведём в нём биссектрису C_2C_3, затем в треугольнике OC_2C_3 проведём биссектрису C_3C_4, и так далее. Докажите, что последовательность величин углов $\angle OC_nC_{n+1}$ стремится к некоторому пределу; найдите этот предел, если $\angle C_1OC_2 = \alpha$.
Десятиклассники А.Бернард, М.Фельштын и И.Ткачёв. Решение — в №6–1975

294. Если a, b, c, d, x, y, z, t — вещественные числа, причём $abcd > 0$, то

$$(ax+bu)(av+by)(cx+dv)(cu+dy) \geqslant (acuvx+bcuxy+advxy+bduvy)(acx+bcu+adv+bdy).$$

Докажите это. *В.П.Федотов. Решение — в №6–1975*

295*. Площади сечений выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями p_0, p_1 и p_2, где p_1 расположена между p_0 и p_2 на одинаковом расстоянии h от той и другой, равны S_0, S_1 и S_2 соответственно. Между p_0 и p_2 нет ни одной вершины многогранника.

а) Докажите неравенство $2\sqrt{S_1} \geqslant \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2}$.

б) Когда оно обращается в равенство?

в) Найдите площадь S_t сечения многогранника плоскостью, параллельной плоскости p_0 и расположенной на расстоянии th от p_0 и на расстоянии $(2 - t)h$ от p_2. (Разумеется, $0 \leqslant t \leqslant 2$.)

г) Найдите объём части многогранника, заключённой между плоскостями p_0 и p_1.

Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1975

296. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

А.Тупанов. Решение — в №7–1975

297. На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами квадратов $A_1B_1A_2C_1$, $A_2C_2A_3B_2$, $A_3B_3A_4C_3$ и $A_4C_4A_1B_4$ (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке). Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — конгруэнтные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на 90° (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них в этом случае лежат на одной прямой).

Л.П.Купцов. Статья В.Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований» седьмого номера 1975 года

298. Запишем все несократимые дроби $\frac{p}{q}$, где $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$, в порядке возрастания (m — данное натуральное число). Например, при $m = 5$ получим последовательность $\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$. Для любых двух соседних дробей $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ такой последовательности докажите равенство $qr - ps = 1$.

Н.Б.Васильев. Статья «Близкие дроби» восьмого номера 1975 года

299. При каких n правильный n-угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)

Н.Б.Васильев. Решение — в №7–1975; статья А.А.Егорова «Решётки и правильные многоугольники» двенадцатого номера 1974 года

300*. Алфавит состоит из трёх букв: a, b, c. Назовём словом последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (из двух и более букв) запрещены. Докажите, что если в списке запрещённых буквосочетаний все слова разной длины, то существует сколь угодно длинное слово, не содержащее запрещённых буквосочетаний.

А.М.Стёпин. Статья А.Стёпина и Г.Таги–Заде «Слова с ограничениями» десятого номера 1975 года. Комментарий — в статье «Бесповторные последовательности» девятого номера 1975 года

1975 год

301. На плоскости заданы $2n$ точек — синих и красных, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец — синяя точка, другой — красная, и никакие два отрезка не пересекаются. *Десятиклассник С. Охитин (Оренбург), А.Л. Тоом и Н.Б. Васильев.* *Решение — в №8–1975. Статья Л.Д. Курляндчика и Д.В. Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года*

302. O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, а точки A' и B' симметричны соответственно точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите равенство углов ACA' и BDB'.

Десятиклассник А. Буяновский (Гомель). *Решение — в №8–1975*

303. Прямоугольник размером 300×1000 разрезан на квадраты 1×1, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут. *А.В. Шерстюк и Н.Б. Васильев.* *Решение — в №8–1975*

304. Будем обозначать кружочком некоторую операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам a и b, дающую в результате целое неотрицательное число $a \circ b$ и удовлетворяющую следующим условиям:

- $a \circ b = b \circ a$;
- если $a \circ b = c$, то $b \circ c = a$;
- если $a \circ b > c$, то $b \circ c < a$ или $a \circ c < b$.

а) Найдите $0 \circ 0$, $0 \circ 1$, $1 \circ 1$ и $0 \circ 2$.

б) Докажите равенства $0 \circ a = a$ и $1 \circ a = \begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ чётно;} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечётно.} \end{cases}$

в) Существует не более чем одна такая операция. Докажите это.

г) Такая операция существует. Докажите это и укажите правило, позволяющее по заданным a и b вычислять $a \circ b$. *А.А. Григорян и А.Л. Тоом.* *Решение — в №9–1975*

305*. На хордах AB и $A'B'$ окружности выбрано по точке C и C' так, что три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке P. Обозначим $AP \cdot PA' = t$, $AC \cdot CB = s$, $A'C' \cdot C'B' = S$, $CP = q$, $C'P = Q$. Докажите, что если $q \neq 0$, то

$$\sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{Q}{q} = \frac{S+Q^2}{t} = \frac{t}{s+q^2}.$$

б) Через точку P, не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности, лежащей на этой сфере, проведена прямая. Докажите, что вторые точки пересечения проведённых прямых со сферой также лежат на некоторой окружности.

Замечание. Пункт б) можно решить при помощи утверждения пункта а), поэтому они и объединены под одним номером. Подумайте, однако, как решить пункт б) при помощи инверсии. *А.И. Ширшов и И.Н. Клумова.* *Решение — в №9–1975. Обсуждение — в статье «Модель Кэли–Клейна геометрии Лобачевского» третьего номера 1976 года*

306. Из шахматной доски удалена одна угловая клетка. На какое наименьшее число равновеликих (одинаковых по площади) треугольников можно разрезать оставшуюся часть доски?
В.П.Федотов. *Решение — в №9–1975*

307. Плоскость разбита на конгруэнтные правильные шестиугольные комнаты. В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через чётное число дверей.
В.П.Голубятников и А.Л.Тоом. *Решение — в №9–1975*

308. Если при любом x верно неравенство

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \geqslant -1,$$

то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n$. Докажите это утверждение для а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) любого натурального n.
Ю.И.Ионин. *Решение — в №10–1975*

309. а) При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

б) При каких n на 37 делится число $1\underbrace{00\ldots00}_{n}1\underbrace{00\ldots00}_{n}1$, где как между первой и второй, так и между второй и третьей единицами стоит по n нулей?
В.Г.Шлейфер. *Решение — в №10–1975. Поправка к условию — на странице 40 четвёртого номера 1975 года*

310. Для любого натурального числа n среди n-значных чисел существует более 8^n таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности, никакая цифра) не встречается два раза подряд. Докажите это.
Г.А.Гуревич. *Статья «Бесповторные последовательности» девятого номера 1975 года*

311. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.
Д.Ю.Григорьев. *Решение — в №10–1975*

312. В параллелограмм вписан параллелограмм, в который вписан другой параллелограмм, причём стороны третьего параллелограмма соответственно параллельны сторонам первого. Докажите, что длина хотя бы одной стороны третьего параллелограмма не меньше половины длины соответствующей стороны первого.
А.А.Григорян. *Решение — в №10–1975*

313. Рассмотрим множество четвёртых вершин параллелограммов $ONML$, вершины N и L которых лежат на сторонах данного угла с вершиной O, а площадь равна данной величине. (Это множество называют *гиперболой*.) Докажите, что на биссектрисе этого угла и на её продолжении существуют такие точки F_1 и F_2, что разность расстояний F_1M и F_2M одна и та же для всех точек M. Можно доказать, что $F_1O = OF_2$ и существуют перпендикулярные биссектрисе данного угла такие прямые d_1 и d_2 (*директрисы* гиперболы), что отношение длины отрезка F_1M (или F_2M) к расстоянию от точки M до прямой d_1 (соответственно, d_2) одно и то же для всех точек M.
И.Н.Бронштейн. *Решение — в №10–1975. Статья «Гипербола» третьего номера 1975 года*

314. Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найдите такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр а) наименьшая; б) наибольшая. Каков ответ для n-значных чисел при любом n?
А.Г.Лейдерман и И.Н.Клумова. *Решение — в №11–1975*

315. На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка. Докажите, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на её сторонах. *А.М.Зубков.* *Решение — в №10–1975*

316. а) Сумма квадратов k последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если k равно 3, 5, 7 или 9. Докажите это.

б) Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа. *Э.Г.Готман.* *Решение — в №11–1975*

317.* На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каждая страна лишилась не более половины имевшегося у неё золота.
Г.В.Егоров. *Решение — в №11–1975*

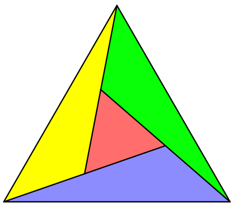
318. AD и CE — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что $CE \cdot AB = AD \cdot BC$ тогда и только тогда, когда $AB = BC$ или $\angle ABC = 60^\circ$. *А.П.Савин.* *Решение — в №12–1975*

319. Точка P лежит внутри данной окружности. Рассмотрим тетраэдры $ABCD$, у каждого из которых все грани конгруэнтны, причём треугольник ABC вписан в данную окружность, а его медианы пересекаются в данной точке P.

а) При каком положении точки P внутри окружности такие тетраэдры существуют?

б) Вершина D любого такого тетраэдра расположена в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости). Докажите это. *И.Ф.Шарыгин и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №12–1975*

320.* Какие выпуклые n-угольники можно разбить на треугольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке показано, что треугольник так разбить можно.) *А.Печковский.* *Решение — в №12–1975*



321. Для любого прямоугольного стола и для любого положительного числа ε можно указать такую систему покрывающих этот стол прямоугольных салфеток, края которых параллельны краям стола, что любая её подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую ε. Докажите это.
А.В.Браилов. *Решение — в №1–1976. Статья «О задаче Радо» восьмого номера 1975 года*

322. а) Фигура, состоящая более, чем из одной точки, является пересечением n кругов. Докажите, что граница этой фигуры представима в виде объединения $2n-2$ дуг окружностей.

б) В алфавите n букв. Несколько букв выписано по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв a и b можно провести прямую так, что все буквы a будут по одну сторону от прямой, а буквы b — по другую. Докажите, что выписано не более $2n-2$ букв.
С.В.Фомин. *Решение — в №1–1976*

323.* Любую функцию, определённую на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии. Докажите это. *В.А.Сергеев.* *Решение — в №1–1976*

324. Имеется несколько куч камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучу, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучи. Ходы делают поочередно, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Научите начинающего выигрывать, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней.

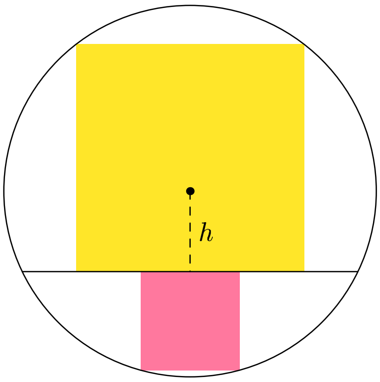
С.В.Фомин. *Решение — в №1–1976*

325. В некотором треугольнике верхнее число равно 1, крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет изображённый здесь треугольник Паскаля). Натуральное число a, большее 1, встретилось в этом треугольнике k раз. Докажите неравенство $2^k < a^2$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

Ю.И.Ионин. *Решение — в №1–1976*

326. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В сегменты, стягиваемые хордой, вписано по квадрату так, что две соседние вершины каждого из квадратов лежат на дуге, две другие — на хорде. Найдите разность длин сторон этих квадратов. *Э.Г.Готман.* *Решение — в №2–1976*



327. В компании n человек. Каждому из них нравятся ровно k человек из этой компании. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, нравящиеся друг другу?

Десятиклассник А.Колодин (город Коломыя) и А.Л.Тоом. *Решение — в №2–1976*

328. По правильному тетраэдру ползают два паука и муха. Муха ползает только по рёбрам, а пауки — по всей поверхности. Максимальная скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.

а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки могут поймать муху.

б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи более чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?

в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по рёбрам тетраэдра? по всему объёму тетраэдра?

Девятиклассник О.Ефремов (город Ангарск) и А.Ходулёв. *Решение — в №2–1976*

329. Среди вершин любого выпуклого n-угольника, расположенного внутри квадрата со стороной 1, обязательно есть такие три вершины, что площадь треугольника с вершинами в них меньше числа $8/n^2$. Докажите это.

330. На плоскости расположены выпуклые n_0-угольник M_0 и n_1-угольник M_1. Обозначим буквой M множество середин отрезков, один конец каждого из которых принадлежит M_0, а другой — M_1. Докажите, что M — выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь M?

б) Каким может быть периметр многоугольника M, если периметр M_0 равен P_0, а периметр M_1 равен P_1?

в*) Какой может быть площадь многоугольника M, если площадь M_0 равна S_0, а площадь M_1 равна S_1? *Н.Б.Васильев. Статья «Сложение фигур» четвёртого номера 1976 года*

331. а) Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения прямых AB, BC и CA с, соответственно, прямыми $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC.

б) Четырёхугольник $A'B'C'D'$ получен из вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ поворотом вокруг центра окружности на угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CD и $C'D'$, DA и $D'A'$ — являются вершинами параллелограмма.
З.А.Скопец. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №3–1976

332. При каких k можно составить куб с ребром k из белых и чёрных единичных кубиков так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей были бы того же цвета, что и сам кубик? (Два кубика считаем соседними, если они имеют общую грань.) *А.Г.Гейн. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №3–1976*

333. Три мухи ползают по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого ими треугольника остаётся на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC, если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. Центр тяжести треугольника — это точка пересечения его медиан. *С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №3–1976*

334. Коэффициенты многочлена P а) натуральные; б*) целые. Для каждого натурального числа n обозначим сумму цифр десятичной записи числа $|P(n)|$ через a_n. Докажите существование числа, которое встречается в последовательности a_1, a_2, a_3, ... бесконечно много раз.
И.Н.Бернштейн. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №3–1976

335*. а) В квадрате размером 7×7 клеток отмечены центры k клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите ту же задачу для квадрата размером 13×13 клеток.
С.Б.Гашков, А.А.Григорян и Э.Белага. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №3–1976

336. На плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников.
С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №4–1976

337. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — точку Y на стороне BC, затем первый — точку Z на стороне AC.

а) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ как можно большей площади, второго — как можно меньшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

б) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ как можно меньшего периметра, второго — как можно большего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый? *М.Д.Бронштейн. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №4–1976*

338. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешено стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стёртых (2 вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2). Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.

С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №2–1976

339. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих n прямых пересекаются внутри полосы; никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие такими свойствами: идя по такому пути, мы всё время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей есть путь, проходящий

а) не менее чем по n отрезкам;

в) не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

в) по всем n прямым.

А.В.Карзанов. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №4–1976

340*. В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Клетку таблицы называем седловой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел её столбца и не больше остальных чисел её строки.

а) Пусть про таблицу T известно, что любая таблица размером 2×2, получающаяся в пересечении двух столбцов и двух строк таблицы T, имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица T также имеет седловую клетку.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — положительные числа. Докажите, что таблица размером $m\times n$, на пересечении k-й строки и j-го столбца которой стоит число $\frac{a_k+b_j}{p_k+q_j}$, имеет седловую клетку.

Одно из решений задачи б) можно получить, используя задачу а). Подумайте, однако, как можно решить эту задачу другим способом.

В.П.Гринберг, Л.Лиманов и Н.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1975 года. Решение — в №5–1976

341. В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачёт чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем k может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберёт строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это чемпионат по а) хоккею (допускаются ничьи); б*) волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а n?

Ю.А.Шнейдер и А.А.Егоров. Решение — в №5–1976

342*. Из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Докажите это.

б) Более 2^{n+1} таких 2^n-значных чисел составить нельзя. Докажите это.

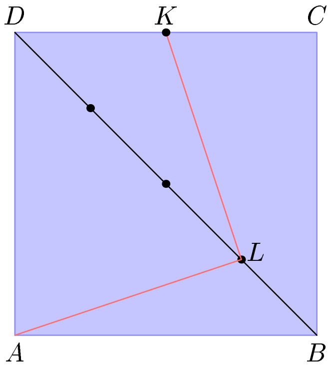
С.В.Фомин и И.Клумова. Решение — в №5–1976

343. В некотором государстве города соединены дорогами. Из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам менее 500 км. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой

другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 км. *С.Л.Елисеев.* *Решение — в №6–1976*

344. На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалось не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей.) *А.Н.Печковский и Ю.Лысов.* *Решение — в №6–1976*

345. В последовательности 197523 ... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд а) четыре цифры 1, 2, 3, 4; б) вторично цифры 1, 9, 7, 5; в) цифры 8, 1, 9, 7? *Г.А.Гуревич.* *Решение — в №6–1976*



346. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $3:1$. Докажите, что угол KLD прямой. *Десятиклассник Ю.Г.Богатуров (Кутаиси) и Л.Лиманов.* *Решение — в №6–1976*

347. Играют двое. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел — 0, 1 или 2 — совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа? *А.А.Григорян и Ю.Лысов.* *Решение — в №6–1976*

348. В таблицу размером 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что сумма чисел полученной таблицы равна нулю. *С.М.Агеев и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №6–1976*

349. Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, составленный из а) высот; б) медиан; в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному? *А.П.Савин и И.Клумова.* *Решение — в №6–1976*

350*. С белого углового поля шахматной доски размера $n \times m$ (числа n и m больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон поворачивает под прямым углом. Попав в угол, он останавливается.

а) При каких n и m слон обойдёт все белые поля доски?

б) Сколько всего полей он обойдёт на доске $n \times m$?
Рассмотрите в качестве примеров доски размерами 10×15, 10×25 и 15×25.
Е.Я.Гик и А.Б.Жорницкий. *Решение — в №6–1976*

351. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — центр тяжести, H — основание одной из высот этого треугольника. *Девятиклассник М.М.Имеришвили (Тбилиси) и А.Савин.* *Решение — в №7–1976*

352*. $\left[\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}\right]$ нечётна. Докажите это. *Д.К.Фаддеев.* *Решение — в №7–1976 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

353*. $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что:

а) сумма величин всех двугранных углов тетраэдра, рёбрами которых являются AB, BC, CD и DA, меньше 360°;

б) сумма величин всех двугранных углов тетраэдра больше 360°, но меньше 540°;

в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причём эта сумма равна 2 в том и только в том случае, когда все грани тетраэдра — равные треугольники;

г) если $AB+CD=BD+DA$, то сумма величин двугранных углов, рёбрами которых являются AB и CD, равна сумме величин двугранных углов тетраэдра, рёбрами которых являются BC и AD.
И.Ф.Шарыгин. Решение — в №7–1976

354. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., $4n+2$ в вершинах и серединах сторон правильного $(2n+1)$-угольника так, чтобы сумма трёх чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой? Рассмотрите в качестве примеров случаи $n=3$ или 8.
С.Т.Берколайко. Решение — в №8–1976

355. n ребят перекидываются n мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята снова бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз, и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными). Докажите, что:

а) для любого участника мяч вернётся к нему не более чем через n бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в) для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6, 30 и 105 бросаний (а какова максимально возможная длительность игры для $n=7$, 8 или 20?);

г) длительность игры является делителем числа $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$;

д) длительность игры не может превышать числа $3^{n/3}$.
Э.Г.Белага и Л.Лиманов. Решение — в №8–1976

356. Из точки M, взятой внутри треугольника $A_1B_1C_1$, опущены перпендикуляры MA_2, MB_2 и MC_2 на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Затем из той же точки M опущены перпендикуляры MA_3, MB_3 и MC_3 на прямые B_2C_2, A_2C_2 и A_2B_2, и так далее. Докажите, что треугольник $A_4B_4C_4$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ и, следовательно, для любого натурального n треугольник $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.
Я.Н.Суконник. Решение — в №8–1976

357. Если $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то $x=y=z$ или $x^2y^2z^2=1$. Докажите это.
И.Н.Клумова. Решение — в №8–1976

358. В любом многоугольнике, кроме треугольника, есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри него. а) Докажите это. б) Для каждого n выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n-угольник.
А.Хомодов, И.Клумова и Л.Лиманов. Решение — в №8–1976

359*. Маленький шарик движется внутри биллиарда, имеющего форму эллипса с фокусами A и B, упруго отражаясь от его бортов, по ломаной $P_1P_2P_3P_4\ldots$, где P_1, P_2, P_3, P_4, ... — точки эллипса. Докажите, что если звено P_1P_2 не пересекает отрезок AB, то

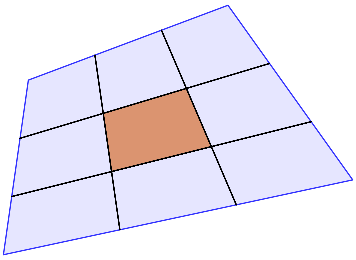
а) ни одно из следующих звеньев P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, ... не пересекает отрезок AB;

б) все эти звенья касаются одного и того же эллипса. (Подумайте, как построить этот эллипс.)
А.Н.Земляков. Статья «Математика бильярда» пятого номера 1976 года, задачи 12 и 13, их решения — в следующем номере

360*. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... обладает тем свойством, что $|a_1|=1$ и $|a_{k+1}|=|a_k+1|$ для любого натурального k. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|a_1+a_2+\ldots+a_n|$, если а) $n=1975$; б) $n=1976$.
В.П.Голубятников. Решение — в №8–1976

1976 год

361. Сначала на клетчатой бумаге выделяют прямоугольник размером $m \times n$ клеток. Играют двое; ходят по очереди. Каждым ходом игрок вычёркивает все клетки какого-то горизонтального или вертикального ряда, в котором ещё остались невычеркнутые клетки. Победитель — тот, кто сделал последний ход. Кто может обеспечить себе выигрыш: начинающий или его партнёр? (Ответ, конечно, зависит от m и n). *А. Бернард, А. Фельштын, А. Ткачёв и А.П. Савин.* *Решение — в №9–1976*



362. Поделим каждую сторону выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах. Докажите, что площадь «среднего» четырёхугольника в 9 раз меньше площади четырёхугольника $ABCD$.

363. Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A_0 и B_0. На первой параболе взяты точки A_1, A_2, ..., A_{2n}, а на второй — точки B_1, B_2, ..., B_{2n} так, что $A_0A_1 \parallel B_0B_1$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, ..., $A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$. Докажите, что $A_0B_{2n} \parallel B_0A_{2n}$. *Нгуен Конг Кви.* *Решение — в №9–1976*

364. Из 16 космонавтов нужно выбрать четверых — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с четырьмя экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз? *Л. Бёве.* *Статья Леонарда Бёве «Мини-геометрия» в №6–1976*

365. а) Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.

в) Может ли случиться, что ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ сходится, а ряд $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$, образованный кубами его членов, расходится?

Ряд $x_1+x_2+x_3+\ldots$ называют сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_n = x_1+x_2+\ldots+x_n$ стремится к некоторому конечному пределу.

Н.Б. Васильев. *Решение — в №10–1976*

366. Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы для любого из них ровно две его вершины лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников, а никакие два треугольника не имели ни одной общей внутренней точки? *В.Е. Колосов.* *Решение — в №10–1976*

367. Может ли произведение а) трёх; б) четырёх последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу, ...)? *Десятиклассник Д. Флейшман.* *Решение — в №10–1976*

368. Пересечение трёх прямых круговых цилиндров, оси которых взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), а радиусы равны 1, содержится в некотором шаре радиуса $\sqrt{3/2}$. Докажите это. *С.В. Фомин и Н.Б. Васильев.* *Решение — в №10–1976*

369*. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром H лежит внутри треугольника. Постройте треугольник, описанный около неё и вписанный в треугольник ABC. *Д. Изаак.* *Решение — в №10–1976*

370*. Рассмотрим тройку неотрицательных чисел: a, b, c. Рассмотрим абсолютные величины разностей этих чисел: $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$. Затем из этой тройки по тому же правилу образуем следующую, затем следующую и так далее. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа а) целые; б) действительные? *Н.Б. Васильев.* *Решение — в №10–1976*

371. В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причём в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любое множество полей, узнать множество чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать числа во всех клетках? *С.В.Фомин.* *Решение — в №11–1976*

372. Дан треугольник ABC. Докажите, что $\angle ACB \geqslant 120^\circ$ в том и только том случае, когда для любой точки P сумма длин отрезков AP, BP и CP не меньше суммы длин отрезков AC и BC. *П.Хайдуков.* *Решение — в №11–1976*

373. а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе счисления) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №11–1976*

374. Числа a, b, c — положительные, $a > c$ и $b > c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

А.Резников. *Решение — в №11–1976*

375. Внутри выпуклого многогранника объёма 1 отмечены $3(2^n - 1)$ точки. Докажите, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объёмом $1/2^n$, не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки. *В.Макеев и Л.Липов.* *Решение — в №11–1976*

376. а) В ряд расположено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — чёрная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперёд или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравший — тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает: начинающий или его партнёр?

б) Решите задачу, заменив в условии 30 на n. *А.Талалай.* *Решение — в №12–1976*

377. Дан треугольник ABC. Найдите на стороне AC такую точку D, чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC. *С.Охитин.* *Решение — в №12–1976*

378*. Существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде а) $x^3 + y^3 + z^3$, где x, y, z — целые числа; б) $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, где x_1, x_2, …, x_n — целые числа. Докажите это.

в) Любое рациональное число представимо в виде суммы кубов трёх рациональных чисел. Докажите это. *В.Е.Колосов и И.Глуманов.* *Решение — в №12–1976*

379*. На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовём промокашку подходящей для данного куска, если её можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для любых двух данных кусков есть промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе есть одна промокашка, подходящая для всех кусков. *В.В.Произволов.* *Решение — в №1–1977*

380*. а) На плоскости дана выпуклая фигура и внутри неё — точка O. К каждой прямой l, проходящей через точку O, проведём перпендикуляр в точке O и на нём по обе стороны от точки O отложим два равных отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой l.

Объединение всех этих отрезков — новая фигура с центром симметрии O. Будет ли полученная фигура выпуклой?

б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром O. К каждой плоскости α, проходящей через точку O, проведём перпендикуляр в точке O и на нём по обе стороны от точки O отложим два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью α. Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии O. Докажите, что полученное тело тоже выпуклое. *С. Пухов. Статья «Задача о выпуклых телах» второго номера 1977 года*

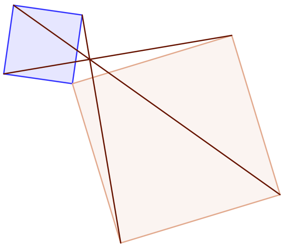
381. 6 активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждые две комиссии отличаются составом, но обязательно «пересекаются», то есть имеют хотя бы одного общего члена. Докажите, что можно образовать ещё одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий. *С.В. Фомин. Решение — в №1–1977*

382. Если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен 1 и ни одно из его значений в нескольких последовательных целых точках не делится на количество этих целых точек, то многочлен не имеет ни одного рационального корня. Докажите это. *Т. Райков. Решение — в №1–1977*

383. Если произведение двух натуральных чисел чётно, то сумму их квадратов можно представить в виде разности квадратов натуральных чисел, а если нечётно, то нельзя. Докажите это. *М.Л. Гервер. Решение — в №1–1977*

384. Если квадраты $OABC$ и $OA'B'C'$ одинаково ориентированы, то прямые AA', BB' и CC' проходят через одну точку. Докажите это.

Два многоугольника называем одинаково ориентированными, если обход одного из них происходит в ту же сторону, что аналогичный обход другого (то есть оба по часовой стрелке или оба — против). *З.А. Скопец и Н.Б. Васильев. Решение — в №1–1977*



385. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах (то есть углах клеток). Выберем какую-нибудь вершину O многоугольника F и обозначим через nF многоугольник, полученный из F растяжением в n раз относительно точки O (число n — натуральное). Будем обозначать через $N(F)$ количество узлов, которые лежат внутри или на границе F, и через $M(F)$ будем обозначать количество узлов, лежащих на границе многоугольника F. Через $S(F)$ обозначим площадь многоугольника F (площадь одной клетки равна 1). Докажите, что

а) $N(nF)$ является многочленом от n;

б) $2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$;

в) $S(F) = N(F) - \frac{M(F)}{2} + 1$;

г) для любых двух выпуклых многоугольников F и G с вершинами в узлах $N(nF + mG)$ является многочленом от m и n (имеется в виду сумма Минковского, о которой рассказано, например, в статье Н.Б. Васильева «Сложение фигур» в «Кванте» №4 за 1976 год).

В трёхмерном пространстве рассмотрим выпуклый многогранник F, координаты всех вершин которого целые. Обозначим через nF многогранник, полученный из F гомотетией с коэффициентом n и центром в начале координат. Будем обозначать через $N(F)$ количество точек с целыми координатами, расположенных внутри или на границе многогранника F, а через $M(F)$ будем обозначать количество точек с целыми координатами, расположенных на границе многогранника. Через $V(F)$ обозначим объём многогранника.

д) Не существует формулы, которая выражает $V(F)$ через $N(F)$ и $M(F)$. Докажите это.

е) Придумайте формулу, которая (для некоторого k) выражает $V(F)$ через $N(F)$, $N(2F)$, ..., $N(kF)$.

ж) Придумайте формулу, выражающую $V(F)$ через $N(F)$, $N(2F)$, $M(F)$ и $M(2F)$.

з*) Докажите формулы, полученные при решении пунктов е) и ж).

и*) $N(nF)$ является многочленом от n. Докажите это.

Л. Гаврилов. Решение — в №4–1977. Статья А.Г. Кушниренко «Целые точки в многоугольниках и многогранниках» четвёртого номера 1977 года

386. Квадратная комната разгорожена перегородками на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

С.В. Фомин. Московская олимпиада 1976 года. Решение — в №2–1977

387*. Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе, то получится точный квадрат? *Б. Кукушкин. Московская олимпиада 1976 года. Решение — в №2–1977*

388. а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдётся точка, у которой не более трёх ближайших (то есть находящихся на наименьшем от неё расстоянии; таких точек, вообще говоря, может быть несколько).

б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?

А. Карабегов. Московская олимпиада 1976 года. Решение — в №2–1977

389. Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

С.В. Фомин. Московская олимпиада 1976 года. Решение — в №2–1977

390*. Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что сумма цифр десятичной записи числа 2^n больше суммы цифр десятичной записи числа 2^{n+1}. Докажите это. *С.В. Конягин. Московская олимпиада 1976 года. Решение — в №2–1977*

391. В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа x_0 и x_1 — натуральные и меньшие 1000, а каждое следующее число равно абсолятной величине разности двух предыдущих. Докажите, что хотя бы один из первых 1500 членов последовательности равен 0.

б) В последовательности $y_0, y_1, y_2, \ldots$ числа y_0 и y_1 — натуральные и меньшие 10 000, а каждый следующий член равен наименьшей из абсолютных величин разностей некоторых двух предыдущих чисел. Докажите равенство $x_{20} = 0$.

С.В. Фомин. Всесоюзная олимпиада 1976 года. Решение — в №3–1977

392. По трём прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

Н.Б. Васильев. Всесоюзная олимпиада 1976 года. Решение — в №3–1977

393. Найдите сумму $f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$, где $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$.

М. Левин и С. Берколайко. Всесоюзная олимпиада 1976 года. Решение — в №3–1977

394. а*) На плоскости даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

Докажите аналогичное неравенство для б) четырёх чисел, сумма которых равна нулю; в*) четырёх векторов трёхмерного пространства, сумма которых равна $\vec{0}$.

Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада 1976 года. *Решение — в №3–1977. Статья Ю.И.Ионина и А.И.Плоткина «Среднее значение функции» в «Кванте» седьмого номера 1977 года*

395.* В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа 1 и —1. За один шаг разрешено изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах правильного k-угольника с центром O (при этом разрешены и «двуугольники» — отрезки с серединой в точке O). Докажите существование такого первоначального расположения единиц и минус единиц, что из него ни за какое число шагов нельзя невозможно получить набор из одних только 1, при а) $n=15$; б) $n=30$; в) n — любое натуральное число, $n>2$.

г) Выясните для произвольного n, сколько существует типов расстановок, то есть каково наибольшее количество элементов в множестве расстановок чисел 1 и —1, ни одну из которых нельзя получить ни из какой другой расстановки этого множества при помощи интересующих нас операций. Например, докажите, что для $n=2\,100$ существует 2^{480} таких расстановок.

С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада 1976 года. *Решение — в №4–1977*

396. Треугольник, все стороны которого больше 1, назовём большим. Рассмотрим треугольник Δ, длины всех сторон которого равны 5. Докажите, что а) из Δ можно вырезать 1000 больших треугольников; б) Δ можно разрезать на 1000 больших треугольников; в*) Δ можно триангулировать на 1000 больших треугольников, то есть разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону; г*) решите пункты б) и в) для равностороннего треугольника со стороной длины 3.

С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада 1976 года. *Решение — в №5–1977*

397. На плоскости даны три окружности одинакового радиуса. Докажите, что если они а) пересекаются в одной точке, как показано на левом рисунке, то сумма величин отмеченных дуг AK, CK и EK равна 180°; б) расположены так, как показано на правом рисунке, то сумма величин отмеченных дуг AB, CD и EF равна 180°.

А.К.Толпыго. Всесоюзная олимпиада 1976 года. *Решение — в №5-1977*

398. На окружности расположены n чисел, сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Существуют соседние числа, различающиеся не менее чем на $4/n$. Докажите это.

б) Если $n>2$, то хотя бы одно из чисел отличается от среднего арифметического своих соседей не менее чем на $8/n^2$. Докажите это.

в) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г*) Докажите, что для $n=30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $2/113$. Приведите пример набора 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на $2/113$.

д*) Найдите точную оценку разности между числом и средним арифметическим его соседей для любого $n>2$.

Всесоюзная олимпиада, 9 класс, 1976 год. *Статья Н.Б.Васильева и А.К.Толпыго «Плавные последовательности» шестого номера 1977 года*

399*. На отрезке длиной 7 можно расставить 5 точек так, чтобы для любого $m = 1, 2, 3, \ldots, 7$ нашлись две отмеченные точки на расстоянии m. Попробуем выяснить, какое наименьшее число k точек нужно поставить на отрезке длиной n так, чтобы для любого целого m, где $1 \leqslant m \leqslant n$, нашлись две отмеченные точки на расстоянии m.

а) Найдите k для $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$.

б) Оцените величину k для любого натурального n: докажите неравенства $\frac{\sqrt{8n+1}+1}{2} \leqslant k \leqslant \sqrt{4n+5} - 1$. Постарайтесь найти более точные оценки. *А.П.Савин.*

Статья А.Савина «От школьной задачи — к проблеме» двенадцатого номера 1976 года и статья В.Чванова «Нет линии прямей кольца» седьмого номера 1991 года

400*. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ назовём универсальной для данного n, если из неё можно получить вычёркиванием части членов любую перестановку чисел от 1 до n, то есть любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел от 1 до n входит по одному разу.

Приведите пример универсальной последовательности из а) n^2; б) $n^2 - n + 1$ членов.

в) Любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $n(n+1)/2$ членов. Докажите это.

г) При $n = 4$ кратчайшая универсальная последовательность состоит из 12 членов. Докажите это.

д) Для каждого натурального n постарайтесь указать как можно более короткую универсальную последовательность. *Д.Н.Бернштейн и Г.А.Гуревич.*

Всесоюзная олимпиада 1976 года. *Решение — в №5–1977. Статья В.Чванова «Нет линии прямей кольца» седьмого номера 1991 года*

401. Внутри остроугольного треугольника ABC расположена такая точка P, что величины углов APB, BPC и CPA на 60° больше соответственно величин углов ACB, BAC и CBA. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP (за точку P) с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC, лежат в вершинах равностороннего треугольника. *А.А.Ягубьянц.* *Решение — в №5–1977*

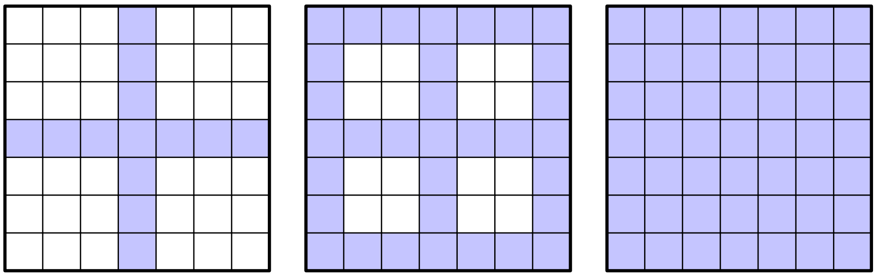
402. Не существует строго возрастающей последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ целых неотрицательных чисел, для каждых натуральных m и n удовлетворяющей равенству $a_{mn} = a_m + a_n$. Докажите это. *Ю.И.Ионин и С.В.Фомин.* *Решение — в №5–1977*

403. Если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит чётное число рёбер, то любое сечение плоскостью, не проходящей ни через одну из вершин, является многоугольником с чётным числом сторон. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №6–1977*

404. На полке стоят первые n томов энциклопедии, где $n > 3$. Позволено взять любые три рядом стоящих тома и поставить их между любыми двумя томами или же в начало или в конец ряда, не меняя при этом порядка этих трёх томов. При любой ли первоначальной расстановке томов можно, применив несколько раз указанную операцию, расставить их в порядке возрастания номеров?

А.П.Савин. *Статья «От школьной задачи — к проблеме» двенадцатого номера 1976 года*

405. На шахматной доске размером 99×99 отмечена фигура Φ. В каждой клетке фигуры Φ сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки



той же фигуры $\varPhi$; при
этом в одну клетку могли сесть несколько жуков. После перелёта любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называем клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

а) Пусть фигура $\varPhi$ — это «центральный крест». Докажите, что в таком случае какой-то жук вернулся на место или перелетел на соседнюю клетку.

б) Верно ли это утверждение, если фигура $\varPhi$ — «оконная рама»?

в) А если фигура $\varPhi$ — вся доска?

В.В.Произволов и Д.Н.Бернштейн. X Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №6–1977*

406. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Докажите для любой точки M этой окружности равенство $AM^4+BM^4+CM^4+DM^4=24R^4$.

Ю.Бабенко. *Решение — в №6–1977*

407. Если n и m — натуральные числа, причём $n>m$, то n представимо в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа m, а другое взаимно просто с m. Докажите это. *С.В.Конягин.* *Неверное решение — в №6–1977*

408. Из 30 равных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?

П.Панков. *Решение — в №6–1977*

409. В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом a первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число a встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой — пятую, и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б*) Докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.

в*) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й. *М.Серов.* *Решение — в №6–1977*

410. На сфере с радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Будем использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, значение которой в каждой данной точке M равно квадрату расстояния от M до плоскости экватора. Проверьте для любых трёх концов X, Y, Z трёх взаимно перпендикулярных радиусов сферы равенство

$$f(X)+f(Y)+f(Z)=1. \qquad (*)$$

В следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая равна 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б*) Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M расположена дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M) \geqslant f(N)$.

в*) Пусть M и N — произвольные точки сферы, причём M расположена дальше от плоскости экватора, чем N. Докажите неравенство $f(M) \geqslant f(N)$.

г*) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

А. Лодкин. Статья «Функциональное уравнение на сфере» шестого номера 1977 года

411. Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину x. Выразите x через длины a, b и c сторон треугольника. *А.А. Ягубьянц. Решение — в №7–1977*

412. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на другую. *А. Гольдберг и Л.Г. Лиманов. Решение — в №7–1977*

413*. Для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: для любой функции f, определённой на отрезке $[0; 1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0) = f(1) = 0$, уравнение $f(x + a) = f(x)$ имеет решение?

а) Разберите случай $a = 1/2$.

б) Для $a = 1/n$, где n — натуральное число, докажите сформулированное утверждение.

в) Докажите, что для остальных положительных a оно ложно.

При решении этой задачи может пригодиться следующая теорема о промежуточном значении: если функция g определена на отрезке $[a; b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и на концах его принимает значения разных знаков, то между a и b найдётся такая точка c, что $g(c) = 0$. *И.М. Яглом. Статья «О хордах непрерывных кривых» четвёртого номера 1977 года*

414. а) Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника его диагоналями, площади четырёх равны S, а площадь пятого — $3S/2$. Найдите площадь x этого пятиугольника.

б*) Если S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 — площади пяти таких треугольников, то

$$x^2 - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)x + S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1 = 0.$$

А. Лопшиц. Решение — в №7–1977. Статья «Задача Мёбиуса и её продолжения» третьего номера 1977 года

415. Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске $n \times n$, чтобы они не били один другого? (Торическую шахматную доску получаем из обычной доски, склеивая её верхнюю горизонталь с нижней, а левую вертикаль с правой. На торической доске с каждого поля король может пойти на любое из восьми соседних полей.) *А. Толпыго и А. Футер. Решение — в №7–1977. Статья А. Футера «Сигналы, графы и короли на торе» седьмого номера 1977 года*

416. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках? *А.А. Григорян, М. Примак, С. Фишбейн и Г. Фридман. Решение — в №8–1977*

417. На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше $3\sqrt{2}$. *В.В. Произволов. Решение — в №8–1977*

418. Для любого натурального n докажите неравенство

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leqslant 1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №8–1977*

419. В круге радиусом 16 расположены 650 точек. Докажите существование кольца с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежат не менее 10 из данных точек.

А.Г.Гейн. *Решение — в №8–1977*

420. а) Из дроби a/b, где $a\neq 0$, разрешено получить любую из трёх дробей $(a-b)/b$, $(a+b)/b$ и b/a (в том числе при $a=0$ или $a<0$; таким образом, дробь мы рассматриваем лишь пару чисел, допуская ноль в знаменателе). Можно ли такими преобразованиями из дроби $1/2$ получить дробь $67/91$?

б*) Из пары дробей $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$ разрешено получить любую из пар $\left(\frac{a+b}{b},\frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b},\frac{c-d}{d}\right)$ и $\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right)$ (в том числе при $a\leqslant 0$ или $c\leqslant 0$). Можно ли из пары дробей $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{7}\right)$ получить следующие пары: $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$; $\left(\frac{4}{5},\frac{7}{8}\right)$; $\left(\frac{5}{19},\frac{13}{50}\right)$; $\left(\frac{39}{50},\frac{60}{77}\right)$?

в*) Постарайтесь выяснить, какие вообще дроби (соответственно, пары «дробей» с возможно равными нулю знаменателями) можно получить из данных в пунктах а) и б).

Г.А.Гуревич и Б.Макаревич. *Статья Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера «Арифметические препятствия» третьего номера 1979 года*

1977 год

421* При каких натуральных m и n, где $m \leqslant n$, можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги таким образом, чтобы любой прямоугольник размером $m \times n$ содержал ровно одну закрашенную клетку? Начните с частных случаев $m = 2$ и $n = 3$, 4 или 5. *Десятиклассник С.Охитин.* *Решение — в №9–1977*

422. Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, три из которых конгруэнтны между собой. *А.Хабелашвили.* *Решение — в №9–1977*

423* Для любых вещественных чисел x, y и z докажите неравенство $(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2) \leqslant (x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2$.
Р.Шейнцвит и Г.Гуревич. *Решение — в №9–1977*

424. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке. *А.А.Ягубьянц.* *Решение — в №9–1977*

425* Существует ли такое натуральное n, что каждое рациональное число между нулём и единицей представимо в виде суммы n чисел, обратных натуральным? *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №9–1977*

426. Таблица размером $n \times n$ заполнена числами от 1 до n следующим образом:

1	2	3	4			...		$n-1$	n
2	3	4			...		$n-1$	n	1
3	4			...		$n-1$	n	1	2
4			...		$n-1$	n	1	2	3
		...		$n-1$	n	1	2	3	4
	...		$n-1$	n	1	2	3	4	
...		$n-1$	n	1	2	3	4		...
$n-2$	$n-1$	n	1	2	3	4		...	
$n-1$	n	1	2	3	4		...		$n-2$
n	1	2	3	4		...		$n-2$	$n-1$

При каких n в ней можно выбрать n клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные? *А.Ненашев.* *Решение — в №10–1977*

427. Докажите следующие утверждения.

а) Существует такое нечётное число n, что ни для какого чётного k ни одно из чисел k^k+1, $k^{k^k}+1$, $k^{k^{k^k}}+1$, $k^{k^{k^{k^k}}}+1$, ... не делится на n.

б) Для любого натурального n существует такое натуральное k, что все члены последовательности k^k+1, $k^{k^k}+1$, $k^{k^{k^k}}+1$, $k^{k^{k^{k^k}}}+1$, ... делятся на n.
Девятиклассник С.Лавренченко. *Решение — в №10–1977*

428. В олимпиаде участвуют $mn-n+1$ человек. Докажите, что среди них найдутся m участников, попарно незнакомых между собой, либо найдётся участник, знакомый не менее чем с n участниками олимпиады. Останется ли верным утверждение задачи, если количество участников олимпиады уменьшится на единицу? Отношение знакомства считаем симметричным: если Дутин знаком с Жутиным, то и Жутин знаком с Дутиным. *Э.Туркевич.* *Решение — в №10–1977*

429. а) Сколько решений имеет уравнение $[x]-1977\{x\}=1978$?

б) Если $p\neq 0$, то для любого q уравнение $[x]+p\{x\}=q$ имеет $[|p|]$ или $[|p|]+1$ решений. Докажите это. *Ж.Сатаров.* *Решение — в №10–1977*

430. а) Любую выпуклую плоскую фигуру площади S можно поместить в прямоугольник площади $2S$. Докажите это.

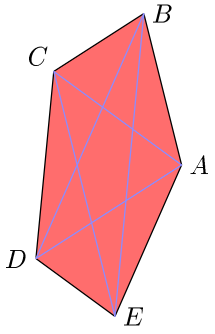
б*) Любое выпуклое тело объёма V можно поместить в прямоугольный параллелепипед объёма $6V$. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №10–1977*

431. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B. Докажите, что для этой цели достаточно иметь провод длиной $1{,}6AB$. *А.Альтшулер.* *Решение — в №11–1977*

432. Существует ли натуральное число, сумма цифр десятичной записи квадрата которого равна а) 1977; б) 1978?

в*) Какие натуральные числа являются суммами цифр десятичной записи квадрата целого числа? *А.Гришков.* *Решение — в №11–1977*

433. Сторона BC выпуклого пятиугольника $ABCDE$ параллельна диагонали AD, сторона CD — диагонали BE, сторона DE — диагонали AC, а сторона AE — диагонали BD. Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE. *И.Клумова и Э.Туркевич.* *Длинное решение — в №11–1977; короткое — в заметке А.В.Спивака«Когда диагональ пятиугольника параллельна стороне?» первого номера 2009 года*



434*. Для каждого натурального n представим сумму $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ в виде несократимой дроби p_n/q_n. Докажите следующие утверждения.

а) Все числа p_1, p_2, p_3, ... чётные.

б) Если $n>3$, то p_n делится на 8.

в) Для любого натурального k можно указать такое n, что все числа p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, ... делятся на 2^k.

Д.К.Фаддеев. *Решение — в №12–1977. Статья Б.Беккера, С.Востокова и Ю.И.Ионина «2-адические числа» второго номера 1979 года*

435*. В таблице размером $m\times n$ записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. Пусть $k\leqslant m$ и $l\leqslant n$. В каждом столбце подчеркнём k наибольших чисел, а в каждой строке — l наибольших чисел. Докажите, что по крайней мере kl чисел подчёркнуты дважды. Разберите случаи а) $k=l=2$; б) $k=l=3$; в) k и l — любые. *С.В.Конягин.* *Решение — в №12–1977*

436. Даны 20 чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}, b_1, b_2, ..., b_{10}. Докажите, что набор из 100 чисел (не обязательно различных), получаемых сложением одного из чисел a_k с одним из чисел b_m, можно так разбить на 10 наборов, по 10 чисел в каждом, что сумма элементов подмножества будет одна и та же для всех подмножеств. *С.Т.Берколайко.* *Решение — в №1–1978*

437. Нечётное число, являющееся произведением n различных простых чисел, представимо в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^n-1 способами. Докажите это. Например, число $5\cdot 13$ представимо двумя способами: $65=9^2-4^2=33^2-32^2$. *О.Гончарик и С.Сергей.* *Решение — в №1–1978*

438. В данный сегмент вписываем всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания проводим касающуюся их прямую. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку. *З.А.Скопец и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1978*

439*. а) Уравнение $ax^k+bx^l+cx^m=1$, где a, b и c — действительные, а k, l и m — натуральные числа, имеет не более трёх положительных корней. Докажите это.

б) Уравнение, в левой части которого находится сумма n слагаемых вида ax^k, где k — натуральное число, а a — действительное число, имеет не более n положительных корней. Докажите это.

в) Уравнение $ax^k(x+1)^p+bx^l(x+1)^q+cx^m(x+1)^r=1$, где a, b и c — действительные, а k, l, m, p, q и r — натуральные числа, имеет не более 14 положительных корней. Докажите это. *А.Г.Кушниренко.* *Решение — в №1–1978*

440*. Куб $100\times100\times100$ составлен из миллиона единичных кубиков. Назовём шампуром прямую, проходящую через центры кубиков и параллельную рёбрам куба.

а) При каком наименьшем k можно провести k непересекающихся шампуров так, чтобы к ним нельзя было добавить ещё один не пересекающий их шампур?

б) При каком наибольшем k можно провести $3k$ непересекающихся шампуров так, чтобы среди них было k шампуров каждого направления?

Н.Ю.Нецветаев и С.В.Фомин. *Решение — в №1–1978*

441. Внутри выпуклого $2n$-угольника взята произвольная точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите существование стороны многоугольника, с которой ни одна из проведённых прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны). *Г.А.Гуревич.* *Решение — в №2–1978*

442. Пусть p — простое число, $p>2$. Для каждого натурального числа $k<p$ обозначим через a_k остаток от деления числа k^p на p^2. Докажите равенство $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{p-1}=(p^3-p)/2$. *С.Охитин.* *Решение — в №2–1978*

443. Рассмотрим таблицу размером $n\times n$, все клетки которой заполнены нулями. Разрешено произвольно выбрать n чисел, стоящих в разных строках и разных столбцах, и увеличить каждое из них на 1.

1	2	3	$\dots$	n
2	3	4	$\dots$	1
3	4	5	$\dots$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	1	2	$\dots$	$n-1$

1	2	3	$\dots$	n
2	3	4	$\dots$	$n+1$
3	4	5	$\dots$	$n+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n-1$

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображённые на рисунках?

б) Можно ли получить таблицу, ни одно число которой не равно никакому другому?

в*) Какие вообще таблицы можно получить через T шагов?

Ф.Г.Шлейфер. *Решение — в №2–1978*

444. На рисунке четыре прямые разбивают плоскость на 11 областей: четырёхугольник, два треугольника, три угла, четыре «бесконечных треугольника» (области, ограниченные каждая отрезком и двумя лучами) и «бесконечный четырёхугольник» (область, ограниченная двумя отрезками и двумя лучами). А три больших круга сферы, не проходящих через одну точку, разбивают сферу на 8 сферических треугольников. (Большой круг — это окружность, являющаяся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы.)

а) Верно ли сказанное для любых четырёх прямых на плоскости, среди которых нет параллельных и нет троек прямых, проходящих через одну точку?

б) На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку?

в) На какие области могут разбить сферу 5 больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку? *А.Н.Колмогоров.* *Решение — в №3–1978*

445. Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как показано на рисунке. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим те окружности или их дуги, которые лежат внутри M, как показано на рисунке. Докажите, что сумма величин окрашенных дуг равна $n\cdot 180^\circ$, где n — натуральное число, и дайте этому геометрическую интерпретацию.
А.Б.Сосинский и И.Клумова. *Решение — в №3–1978. Чертёж — на странице 32 четвёртого номера 1978 года*

446. Окружность радиуса 1 катится снаружи по окружности длины $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружностей отмечена липкой красной краской. При качении любая покрашенная точка красит любую точку, с которой соприкасается. Сколько разных точек неподвижной окружности будут запачканы к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?
Д.Н.Бернштейн и Н.Б.Васильев. *Решение — в №4–1978*

447*. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO, где O — центр описанной окружности, продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и BC. Найдите величины углов треугольника ABC и докажите равенства $AE = ED$, $CE = CB$ и $CD = CO$, если $\angle BDE = 50^\circ$ и $\angle CED = 30^\circ$.
Я.Н.Суконник и Н.Б.Васильев. *Решение — в №4–1978*

448*. Центр любого эллипса, вписанного в данный четырёхугольник, лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырёхугольника. Докажите это.
Исаак Ньютон и Н.Б.Васильев. *Решение — в №4–1978*

449. а) По одной прямой двигаются n одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений между ними может произойти?

б*) Тот же вопрос для трёх шариков массами m_1, m_2 и m_3.

в*) Если по одной прямой двигаются n различных шариков, то общее число столкновений между ними конечно. Докажите это.

В этих задачах шарики — это материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсолютно упруго, то есть с сохранением суммарных импульса и энергии, причём предполагаем, что все происходящие столкновения — только парные: три или более шарика в одной точке одновременно не оказываются. *А.Н.Земляков и Я.Синай.* *Решение — в №4–1978*

450. Система прямоугольников из n этажей построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхнюю сторону каждого прямоугольника делим в отношении $1 : 2 : 3$; на трёх полученных отрезках как на основаниях строим прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так — до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неравных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке выделено). Докажите существование вертикальной прямой, пересекающей не более двух из выбранных прямоугольников.
А.Клепцын. *Решение — в №5–1978*

451. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Для любой прямой, проходящей через две или более отмеченные точки, сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна 0. Докажите, что все числа равны 0. *Ф.В.Вайнштейн.* *Решение — в №5–1978*

452. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причём вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что диагонали шестиугольника $T_1 \cap T_2$, соединяющие его противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

Н.Ю.Нецветаев. Решение — в №5–1978

453*. Дано множество положительных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Для каждого его непустого подмножества выпишем сумму его элементов. Докажите, что все $2^n - 1$ выписанных сумм можно так разбить на n множеств, что в каждом из них отношение наибольшего числа к наименьшему не превзойдёт числа 2.

XI Всесоюзная олимпиада, 8 класс, 1977 год. Решение — в №5–1978

454. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того как седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

В.Л.Гутенмахер и Н.Б.Васильев. Решение — в №5–1978

455. Мы будем рассматривать многочлены от одной переменной со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (то есть после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду соответствующие коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для любого числа α найдите все многочлены степени не выше третьей, коммутирующие с многочленом $x^2 - \alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите все многочлены степени 4 или 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Если два многочлена коммутируют с одним и тем же многочленом второй степени, то они коммутируют между собой. Докажите это.

д) Существует бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, P_3, …, каждые два члена которой коммутируют, а $P_2(x) = x^2 - 2$. Докажите это.

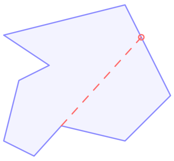
И.Н.Бернштейн и Э.Туркевич. Статья И.Янтарова «Коммутирующие многочлены» четвёртого номера 1979 года

456. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся 3 ребра, а каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

В.В.Производов и И.Н.Бернштейн. Решение — в №6–1978

457. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовём пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар чётно.

С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №6–1978



458. Напишем многочлен десятой степени, старший коэффициент которого равен 1, как и его свободный член. Остальные 9 коэффициентов этого многочлена заменим на звёздочки. Пусть теперь двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет одну из звёздочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звёздочек, затем снова первый заменяет одну из звёздочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

Д.Н.Бернштейн и И.Н.Бернштейн. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №6–1978

459*. В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №6–1978

460. Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A особым, если как оно само, так и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, являются квадратами целых чисел; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырёхзначные особые числа.

б) 20-значное особое число существует. Докажите это.

в) Существует не более 10 особых 100-значных чисел. Докажите это.

г) 30-значное особое число существует. Докажите это.

А.Лёвин и И.Н.Бернштейн. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №6–1978

461. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставим на чашки весов (на каждом шаге со стола берём любую гирю и добавляем на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R, где буква L означает, что перевесила левая (left) чашка, а R — что перевесила правая (right).

б*) Для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний. Докажите это.

И.Н.Бернштейн. XI Всесоюзная олимпиада, 9 класс, 1977 год. Решение — в №7–1978

462. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырёхугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d. Докажите равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

К.Шварцман и Н.Б.Васильев. Решение — в №7–1978

463*. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ натуральные. Если $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+$ $+y_2+\ldots+y_n<mn$, то можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы равенство осталось верным. Докажите это.

К.Сибиряков, Д.Н.Бернштейн и Ю.И.Ионин. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №7–1978

464*. На плоскости даны 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

А.И.Плоткин. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №7–1978

465*. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешено опустить в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычёркиванием одной из цифр. Докажите, что а) можно разложить все билеты в 50 ящиков; б) нельзя разложить все билеты в 39 ящиков; в) нельзя разложить все билеты в 49 ящиков.

Пусть вообще имеется 10^k билетов с k-значными номерами (от $00\ldots0$ до $99\ldots9$). Билет разрешено опустить в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычёркиванием некоторых $k-2$ цифр. г) Докажите, что при $k=4$ все 10 000 четырёхзначных билетов можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которое можно разложить k-значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для $k=4$, 5, 6, ...

С.В.Фомин. Всесоюзная олимпиада. Статья «Билеты и ящики» 8 номера 1978 года

466. Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на один грамм (в ту или в другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс грузов на чашках. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Научитесь это делать!

С.В.Фомин и И.Клумова. Решение — в №8–1978

467. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $AD:DC=BE:EA=1:2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC прямой.

А.Краснодемская и Л.Лиманов. Решение — в №8–1978

468. Точки A, B, C и D таковы, что для любой точки M скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ не равно скалярному произведению векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$. Докажите равенство $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

Ю.И.Ионин. Решение — в №8–1978

469*. а) Если уравнение $x^4+ax^3+bx+c=0$ имеет четыре различных вещественных корня, то $ab<0$. Докажите это.

б) Если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{k-1}x^{n-k+1}+a_{k+1}x^{n-k-1}+\ldots+a_n=0$ имеет n различных вещественных корней, то $a_{k-1}a_{k+1}<0$. Докажите это.

В.В.Вавилов. Решение — в №8–1978

470*. Докажите равенства

а) $\frac{1}{C_n^0}-\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}-\ldots+\frac{(-1)^k}{C_n^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{C_n^n}=\frac{(n+1)(1+(-1)^n)}{n+2}$;

б) $\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}+\ldots+\frac{1}{C_n^k}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right)$.

Л.Д.Курляндчик и А.Д.Лисицкий. Решение — в №10–1978. Статья «Как придумать комбинаторное тождество?» пятого номера 1980 года

471. Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трёх областей.

С.В.Фомин. Решение — в №9–1978

472. Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней совпадает с этой гранью. Докажите, что объём многогранника не меньше 1/3 объёма куба.

В.В.Прасолов. Решение — в №9–1978

473*. Даны две группы по n гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания масс. (За одно взвешивание сравнивают массы двух гирь; массы всех гирь разные.) Докажите, что

а) $2^n - 1$ взвешиваниями можно расположить все $2n$ гирь в порядке возрастания их масс;

б) меньшим $2^n - 1$ числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.

В. Гринберг. Решение — в №9–1978

474. Натуральное число называют совершенным, если оно равно половине суммы своих делителей. Докажите, что число несовершенно, если оно а) при делении на 4 даёт остаток 3; б) при делении на 6 даёт остаток 5. (Числа $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ совершенные. До сих пор неизвестно, существует ли нечётное совершенное число.)

И. Клумова, К. Сатаркулов и С. Югай. Решение — в №9–1978

475. а) Равносторонний треугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины попали в узлы сетки (вершины клеток). Докажите это.

б*) На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно для любого положительного числа ε нарисовать равносторонний треугольник, вершины которого находятся на расстоянии меньше ε от трёх различных узлов бумаги. Докажите это.

в*) Для любого ли многоугольника M и любого ли положительного числа ε можно нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник, подобный M, каждая вершина которого находится на расстоянии меньше ε от ближайшего — своего для каждой вершины — узла?

В. Калинников. Статья В. Гальперина и В. Калинникова «Многоугольники на клетчатой бумаге» шестого номера 1978 года

476*. а) Если все вершины выпуклого многоугольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а ни внутри, ни на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$. Докажите это.

б) Пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубы. Вершины кубов назовём узлами. Докажите, что если все n вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его рёбрах, гранях и в его внутренности других узлов нет, то $n \leqslant 8$.

С. Миронов. Решение — в №10–1978

477*. Дан многочлен P с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x верно неравенство $x < P(x)$. Определим последовательность формулами $b_1 = 1$ и $b_{k+1} = P(b_k)$ для каждого натурального k. Докажите, что если для любого натурального числа d хотя бы один из членов последовательности делится на d, то $P(x) = x + 1$.

С.В. Конягин. Решение — в №10–1978

478. В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) Докажите, что если для любых двух команд найдётся третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.

б) Постройте пример такого турнира семи команд.

в*) Докажите, что если для любых трёх команд найдётся такая, которая выиграла у этих трёх, то число команд не меньше 15.

С.В. Конягин. Решение — в №10–1978. Статья «Письмо в редакцию» Л. Цирмаша, Г. и Е. Секерёшей восьмого номера 1980 года

479. Существуют ли а) шесть; б) тысяча таких различных натуральных чисел, что для любых двух из них сумма этих двух чисел делится на их разность?

С.В. Конягин. Решение — в №10–1978

480*. В последовательности, заданной начальным членом $c_1 = 2$ и рекуррентной формулой $c_{n+1} = [3c_n/2]$, а) бесконечно много чётных чисел и бесконечно много нечётных чисел. Докажите это.

б) Последовательность $(—1)^{c_n}$ непериодическая;

в) существует такое число γ, что $c_n = [(3/2)^n \gamma] + 1$ для любого натурального n. Докажите эти утверждения.

С.В.Конягин. Поправка к условию — на странице 27 второго номера 1978 года. *Решение — в №10–1978*

1978 год

481. Каждый член последовательности натуральных чисел, кроме первого, равен сумме квадратов цифр десятичной записи предыдущего члена этой последовательности. Докажите, что каким бы ни был первый член, в последовательности обязательно встретится число 1 или число 89. (Например, если первый член равен 1978, то второй равен $1^2+9^2+7^2+8^2=195$, третий равен $1^2+9^2+5^2=107$, четвёртый — 50, пятый — 25, шестой — 29, седьмой — 85, а восьмой — 89.) *В.Панфилов.* *Решение — в №10–1978*

482. Сечение правильного тетраэдра — четырёхугольник. Докажите, что периметр этого четырёхугольника больше $2a$, но меньше $3a$, где a — длина ребра тетраэдра. *Н.Б.Васильев, В.В.Произволов и А.П.Савин.* *Решение — в №11–1978*

483. а) Отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведённых из острых углов, не превосходит $1/20$. Докажите это неравенство.

б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение. *Я.Темралиев и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №10–1978*

484. При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)? *С.Н.Миронов.* *Решение — в №10–1978*

485*. а) Для любого натурального n число e заключено между числами $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажите это. (Считайте, что по определению число e — это предел последовательности a_1, a_2, a_3, ...)

б) Последовательность $c_n=\left(1+\frac{1}{4n}\right)a_n$ возрастающая, а последовательность $d_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)a_n$ убывающая. Докажите это.

в) Разделим отрезок $[a_n;b_n]$ на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число e?

г) Разделим отрезок $[a_n;b_n]$ на восемь равных частей. В какой из них лежит число e?

д) А если отрезок $[a_n;b_n]$ разделить на 2^k равных частей, где $n>2^k$? *Т.Мартыненко и Р.Ушаков.* *Решение — в №11–1978*

486. Какое из чисел больше: а) $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$; б) $2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ или $3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, где в обоих выражениях n «этажей»? *Л.Д.Курляндчик.* *Решение — в №11–1978*

487. На данных окружностях γ_1 и γ_2 постройте по хорде так, чтобы они были гомотетичны с заданным центром A, принадлежащим γ_1, и чтобы длина хорды окружности γ_2 равнялась данной величине a. *А.Ишмаев.* *Решение — в №11–1978*

488. Рассмотрим последовательность многочленов P_0, P_1, P_2, ... , определённые формулами $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ и $P_{n+1}=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$ для любого натурального x. Докажите равенства

а) $$x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots\,\cfrac{1}{x}}}}=\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$ где в левой части n букв x.

б) $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = P_n(2\cos\varphi)$, если φ/π не целое;

в) $t^{n+1} - \frac{1}{t^{n+1}} = \left(t - \frac{1}{t}\right)P_n\left(t + \frac{1}{t}\right)$, если $t \neq 0$;

г) $P_n(x) = \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x - 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\right)$;

д) $P_n(x) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}(-1)^k C_{n-k}^k x^{n-2k}$;

е) $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$.

ж) Придумайте аналогичные равенства для последовательности многочленов, определённой тем же рекуррентным соотношением, но начинающейся не с многочленов 1 и x, а с многочленов 2 и x.

А.В. Зелевинский и Н.Б. Васильев. Статья «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения» первого номера 1982 года

489. Даны три числа a, b и c. Построим последовательности по формулам $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ для любого натурального n. Докажите, что эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

И. Бурмистрович. Решение — в №11–1978

490*. Для любого простого нечётного числа p и любых $p-1$ целых чисел, не делящихся на p, можно, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p. Докажите это.

С.В. Фомин, Ф. Вайнштейн и В. Гальперин. Решение — в №11–1978

491. Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа. (Например, 16, 24, 36, 54, 81.)

а) Докажите, что сумма квадратов трёх последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.

б) При каких натуральных n сумма квадратов n последовательных членов прогрессии обязательно делится на сумму этих n членов?

Г. Гуревич, Ф. Кадиров и А. Агаев. Решение — в №12–1978

492. В треугольник ABC вписан треугольник $A'B'C'$ так, что $A' \in BC$, $B' \in AC$ и $C' \in AB$. Докажите, что если отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке P, то прямые, соединяющие середины сторон AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, пересекаются в одной точке, причём эта точка, центр тяжести треугольника ABC и точка P лежат на одной прямой.

В. Коржов, Ф. Вайнштейн и Н. Васильев. Решение — в №12–1978

493. Докажите неравенства

$$0{,}785n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0{,}79n^2.$$

Восьмиклассник А. Сивацкий. Решение — в №12–1978

494. Внутри квадрата со стороной 1 расположены n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше а) $3n$; б*) $2n$.

Десятиклассник А. Тартаковский и Н.Б. Васильев. Решение — в №1–1979

495*. В космическом пространстве вокруг планеты O по трём круговым орбитам с центром O равномерно вращаются три спутника. Угловые скорости спутников равны соответственно ω_1, ω_2 и ω_3, а их начальные положения могут быть произвольными. Обязательно ли найдётся момент времени, когда все три спутника и точка O лежат в одной плоскости, если а) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$; б) $\omega_1 = \omega_2 = 1$ и $\omega_3 = 2$; в) $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$ и $\omega_3 = 4$? (Попробуйте выяснить, каков ответ при других соотношениях угловых скоростей.)

Г.А. Гальперин. Решение — в №12–1978

496. Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трёхзначных чисел или не представимых? *С.В.Фомин и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №1–1979*

497. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A', B' и C' соответственно. На отрезках AA', BB' и CC' как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.
В.Л.Гутенмахер. *Решение — в №1–1979*

498*. Для каждого натурального n укажите наименьшее k такое, что любые n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно разделить k прямыми. Прямые разделяют данные точки, если для любых двух из этих точек найдётся прямая, от которой они лежат по разные стороны.
Н.Б.Васильев и А.А.Егоров. *Решение — в №1–1979*

499. Назовём число уравновешенным, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 — нет). Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему любой из 10 цифр становится уравновешенным. *Г.А.Гуревич.* *Решение — в №1–1979*

500. N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-Во» все одновременно повернулись на 90°, некоторые — налево, а некоторые — направо. Ровно через секунду каждый, оказавшийся лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°. Ещё через секунду каждый, оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом, снова поворачивается на 180°, и так далее.

а) Докажите, что движение когда-нибудь прекратится.

б*) Какое наибольшее число раз может повернуться «кругом» один человек?

в*) Сколь долго может не затихать движение в строю?

г) Пусть шеренга бесконечна в обе стороны, и по команде «нале-Во» только конечное множество первоклассников повернулись направо, а остальные — налево. Тогда по правилу задачи движение продолжалось бы бесконечно долго. Докажите, однако, что движение прекратится через конечное время, если это правило заменить таким: первоклассник поворачивается на 180°, только если первый (его сосед) и третий из стоящих перед ним обращены к нему лицом.
Г.Курдюмов и Ю.Неретин. *Решение — в №2–1979 и в статье Г.Курдюмова «Консервативность бесконечного строя» седьмого номера 1979 года*

501. Выберем из последовательности степеней тройки 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, ..., все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку) $3^{f(1)}$, $3^{f(2)}$, $3^{f(3)}$, ... (в частности, $f(1)=2$, так как первое из этих чисел $3^2=9$).

а) Найдите $f(2)$ и $f(3)$ — номера второго и третьего таких чисел.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

в*) Докажите, что $f(n)$ при $n>1$ удовлетворяет условиям

- разность $f(n)-n$ нечётна;
- $\left|f(n)-\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9}\right|<1$

и определена этими условиями однозначно. *Э.Туркевич.* *Решение — в №2–1979*

502. Три отрезка AA', BB' и CC' параллельны и не лежат в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения плоскостей ABC', $AB'C$ и $A'BC$, а N — точка пересечения плоскостей $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$. Докажите, что отрезок MN параллелен трём первоначальным. *З.А.Скопец и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №2–1979*

503. Последовательность a_0, a_1, $\ldots$, a_{2n} выпукла вверх, то есть каждый её член, кроме первого и последнего, не меньше среднего арифметического двух соседних: $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ при $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Докажите неравенство $\frac{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{a_0+a_2+\ldots+a_{2n}}{n+1}$ и выясните, для каких последовательностей оно превращается в равенство. *В.Липкин, Н.Б.Васильев и И.Н.Клумова.* *Решение — в №2–1979*

504*. На шахматную доску размером $n \times n$ уложены k доминошек — плиток размером 1×2, причём положить $(k+1)$-ю доминошку, не перемещая уже имеющиеся доминошки, нельзя. Докажите, что свободных клеток осталось не более чем а) $(n^2+n+1)/3$; б) $(n^2+2)/3$; в) $n^2/3$. г) Можно ли для какого-то n получить более точную оценку? *В.Гроссман и С.Фомин.* *Решение — в №3–1979*

505*. а) Пусть на прямой размещены n материальных точек одинаковой массы. Рассмотрим произвольный отрезок длиной $2r$, содержащий хотя бы одну из его точек, и найдём центр тяжести O_1 всех попавших в него точек. Рассмотрим отрезок длиной $2r$ с серединой O_1 и найдём центр тяжести O_2 всех точек, попавших на отрезок. Затем найдём центр тяжести O_3 всех точек, попавших в отрезок длиной $2r$ с серединой O_2, и так далее. Докажите, что, начиная с некоторого номера, все точки последовательности O_1, O_2, O_3, $\ldots$ совпадают.

б) На плоскости размещены n материальных точек одинаковой массы. Рассмотрим произвольный круг радиуса r, содержащий хотя бы одну из его точек; обозначим через O_1 центр тяжести всех попавших в него точек и построим последовательность O_1, O_2, O_3, $\ldots$, где O_{n+1} — центр тяжести точек, попавших в круг радиуса r с центром O_n. Верно ли, что, начиная с некоторого номера, все точки этой последовательности совпадают?
П.Блехер, Г.А.Гальперин и М.Кельберт. *Статья П.Блехера и М.Кельберта «Алгоритмы классификации» шестого номера 1979 года*

506*. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$. *Э.Туркевич и В.А.Сендеров.* *Решение — в №3–1979*

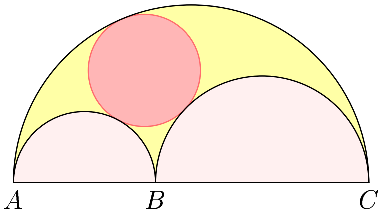
507*. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2n$ — конечная последовательность натуральных чисел, $n > 5$. Докажите неравенство

а) $\min\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} \text{НОК}\left[a_j, a_k\right] \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$;

б) $\max\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n} \text{НОД}(a_j, a_k) > \frac{38n}{147} - c$, где c не зависит от n.

Докажите, что оценки в пунктах а) и б) нельзя улучшить, то есть коэффициент 6 нельзя заменить меньшим, а $38/147$ — бо́льшим. *П.Эрдёш и Д.Н.Бернштейн.* *Решение — в №3–1979*

508. Точка B лежит на отрезке AC. Докажите, что радиус окружности, касающейся трёх полуокружностей с диаметрами AB, BC и AC, вдвое меньше расстояния от её центра до прямой AC. *И.Ф.Шарыгин и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1979*



509*. Решите в натуральных числах уравнения: а) $2^x+1=3^y$; б) $z^x+1=(z+1)^2$; в) $z^x+1=(z+1)^y$. *Д.Флейшман и Л.Г.Лиманов.* *Решение — в №4–1979*

510. В книге «Венгерские математические олимпиады» есть задача №148: «Для любого положительного $\alpha < \pi$ докажите неравенство $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha > 0$.» Докажите следующее обобщение этого неравенства:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha + \ldots + \frac{1}{n}\sin n\alpha > 0$$

для любого положительного $\alpha < \pi$ и для любого натурального n.

И.Биргер, Р.П.Ушаков и В.А.Скворцов. *Решение — в №4–1979*

511. Внутри четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

Ю.В.Михеев и Л.Г.Лиманов. Всесоюзная олимпиада 1978 года. Поправка к условию — на странице 19 девятого номера 1978 года. *Решение — в №4–1979*

512. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ... попарно взаимно просты.

А.Т.Колотов. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №4–1979*

513*. Существует такое число A, что в график функции $y = A\sin x$ можно вписать 1978 попарно неравных квадратов. Докажите это. (Квадрат называем вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

В.Федотов и Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №5–1979*

514*. Существует такая ограниченная бесконечная последовательность x_1, x_2, x_3, ..., что для любых различных натуральных чисел m и n выполнено неравенство $|x_m - x_n| \geqslant \frac{1}{|m-n|}$. Докажите это.

С.В.Конягин и А.Г.Кушниренко. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №5–1979, в статье Н.Вагутена «Сопряжённые числа» второго номера 1980 года и в статье А.В.Спивака «Уравнения Пелля» шестого номера 2002 года*

515*. Рассмотрим конечное множество K_0. К нему добавим все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки множества относительно другой, то есть все точки вида $Z_A B$, где $A, B \in K_0$, а Z — центральная симметрия. Полученное множество обозначим K_1. Аналогично из множества K_1 получаем K_2, из K_2 — K_3, и так далее.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1 друг от друга. При каком наименьшем n в множестве K_n найдётся точка, находящаяся на расстоянии 10 000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трёх вершин треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего K_n (то есть площадь его выпуклой оболочки).

В следующих пунктах K_0 — множество вершин тетраэдра, объём которого равен 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий K_1. Сколько граней у этого многогранника и какие они?

г) Чему равен объём этого многогранника?

д) Найдите объём наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n.

Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №6–1979. Иллюстрация — на второй странице обложки седьмого номера 1978 года*

516. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a;b)$, выдаёт новую карточку $(a+1;b+1)$; второй, прочитав карточку $(a;b)$, выдаёт карточку $(a/2;b/2)$ (он работает только когда a и b чётные); третий по двум карточкам $(a;b)$ и $(b;c)$ выдаёт карточку $(a;c)$. Автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5;19)$. Можно ли получить карточку а) $(1;50)$; б) $(1;100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a;b)$, где $a<b$, а мы хотим получить карточку $(1;n)$. При каких n это можно сделать?

XII Всесоюзная олимпиада. *Статья Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера «Арифметические препятствия» третьего номера 1979 года*

517. В окружность с радиусом R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.

В.Н.Дубровский. XII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №7–1979*

518. Числа x_1, x_2, ..., x_n принадлежат отрезку $[a;b]$, где $0<a<b$. Докажите неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2n^2}{4ab}.$$

С.В.Фомин и Н.Б.Васильев. XII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №7–1979*

519. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, причём $m>n$. Два игрока по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берёт из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Если $m>2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш. Докажите это.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m>\alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

А.М.Слинько. XII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №7–1979*

520. Рассмотрим последовательность чисел $x_n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$. Каждое из них приведём к виду $x_n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}$.

И.Н.Бернштейн. XII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в статье Н.Вагутена «Сопряжённые числа» второго номера 1980 года и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

521. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+{}$ $+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}$.

Г.А.Гуревич. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №8–1979*

522. На плоскости нарисованы непересекающиеся отрезки, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Всегда ли можно провести ещё несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную?

В.В.Произволов. Всесоюзная олимпиада 1978 года. *Решение — в №8–1979*

523. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n\times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает её на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, на котором фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Если n чётно, то начинающий может добиться выигрыша, а если n нечётно, то выигрышная стратегия есть у второго игрока. Докажите это.

б) Кто выигрывает при правильной игре, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

Н.Ю.Нецветаев. Всесоюзная олимпиада 1978 года. Решение — в №8–1979

524. Ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на 1000^m-1. Докажите это. *С.В.Конягин. Всесоюзная олимпиада 1978 года. Решение — в №8–1979*

525*. Для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$. Докажите это.

А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада 1978 года. Решение — в №8–1979

526. а) Площадь выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d и углом $\varphi \neq 90^\circ$ между диагоналями равна $S = \frac{|a^2-b^2+c^2-d^2|\operatorname{tg}\varphi}{4}$. Докажите это.

б) Можно ли выразить S через a, b, c и d, если $\varphi = 90^\circ$?

У.Алла и Л.Г.Лиманов. Решение — в №8–1979

527. Пусть x_1, x_2, ..., x_n —действительные числа, лежащие на отрезке $[0;1]$. Докажите, что величина $x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1$ не превосходит а) 1 при $n=3$; б) 2 при $n=4$; в) $[n/2]$ при любом $n \geqslant 3$.

Десятиклассник В.В.Батырев и И.Н.Клумова. Решение — в №8–1979

528. На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке. Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между любыми двумя фишками не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками называем расстояние между соответствующими центрами клеток.)

М.Бершадский и Н.Б.Васильев. Решение — в №9–1979

529. а) Многоугольник M' — образ выпуклого многоугольника при гомотетии с коэффициентом $k=-1/2$. Докажите существование такого параллельного переноса T, что $T(M') \subset M$.

б) При каких коэффициентах гомотетии k верно аналогичное утверждение?

Н.Ю.Нецветаев. Решение — в №9–1979

530. На прямоугольном клетчатом листе бумаги некоторые клетки закрашены. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетка, имевшая чётное число окрашенных соседей, становится неокрашенной, а имевшая нечётное число окрашенных соседей — окрашенной. (Соседними считаем клетки, имевшие общую сторону.)

а) Докажите, что если множество B окрашенных клеток при перекрашивании не меняется, то $|B|$ чётно.

б) Пусть при перекрашивании множество B_1 окрашенных клеток переходит в B_2, B_2 — в B_3, ..., B_{r-1} — в B_r, а B_r — в B_1. Докажите, что сумма $|B_1|+|B_2|+\ldots+|B_r|$ чётна. *Десятиклассник Р.Измайлов. Решение — в №10–1979*

531. Из пунктов A и B не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов A и B, они опять развернулись и второй раз встретились в точке D; здесь они вновь развернулись, и так далее. В какой точке отрезка AB произошла их 1978-я встреча? *Н.Б.Васильев.* Решение — в №10–1979

532. Положим $a_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и $b_n = \sqrt{4n+2}$. Для любого натурального n докажите, что а) $[a_n] = [b_n]$; б) $0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}$.
Н.Б.Васильев и В.Л.Гутенмахер. Решение — в их статье «Сопряжённые числа» второго номера 1980 года

533*. Назовём выпуклый многоугольник особым, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной внутренней точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника есть вершина A, обладающая таким свойством: для любого положительного ε вершину A можно, не меняя остальных вершин, сдвинуть на расстояние, меньшее ε, таким образом, чтобы получился неособый многоугольник.
В.Г.Болтянский. Решение — в №10–1979, комментарий — в статье Г.Балка, М.Балка и В.Болтянского «Метод малых шевелений» четвёртого номера 1979 года

534. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника ABC по трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трёх из этих треугольников, прилежащих к сторонам треугольника ABC, равна площади четвёртого.
В.Косьянчук. Решение — в №10–1979

535*. Пусть на плоскости задана система из трёх бесконечных в обе стороны последовательностей точек A_k, B_k, C_k, где $k \in \mathbb{Z}$. Назовём такую систему триграммой, если для любых целых k и m точка B_{k+m} лежит на прямой A_kC_m.

а) Проверьте, что изображённая на рисунке система является триграммой.

б) Для любых трёх различных прямых a, b и c существует триграмма, для которой $A_k \in a$, $B_k \in b$ и $C_k \in c$ для любого целого k. Докажите это.

в) Если все точки A_k, где $k \in \mathbb{Z}$, лежат на некоторой прямой a, а все точки B_k — на некоторой прямой b, то все точки C_k тоже лежат на одной прямой. Докажите это.

Пункты б) и в) решите сначала для случая $a \parallel b$.

г) Придумайте ограниченную триграмму (то есть триграмму, все точки которой лежат внутри некоторого круга).
В.Батырев. Статья Н.Б.Васильева «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» восьмого номера 1987 года

536. а) Любой прямоугольник размером $m \times 2n$, где $m > 1$, можно замостить в два слоя костяшками домино таким образом, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две нижние. Докажите это.

б) Пусть прямоугольник размером $2m \times 2n$ уже замощён в один слой. Докажите, что можно выложить второй слой доминошек так, чтобы никакие плитки из разных слоёв не совпадали. *В.В.Прасолов.* Решение — в №10–1979

537. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB и AC этого треугольника в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.
XX международная олимпиада, 1978 год. Решение — в №10–1979

538*. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел представили в виде объединения непересекающихся подмножеств $\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ и $\{g(y) \mid y \in \mathbb{N}\}$, где $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$, $g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$ и $g(n) = f(f(n)) + 1$ для всех $n \geqslant 1$. Вычислите $f(240)$.

XX международная олимпиада, 1978 год. *Решение — в №11–1979. Статья А.В.Спивака «Пентуум хорошо, а ум — лучше» четвёртого номера 1999 года*

539. P — данная точка внутри данной сферы, A, B, C — такие три точки этой сферы, что отрезки PA, PB и PC взаимно перпендикулярны; Q — диагонально противоположная точке P вершина параллелепипеда с рёбрами PA, PB и PC. Найдите множество точек Q.

Н.Б.Васильев. XX международная олимпиада, 1978 год. *Решение — в №11–1979*

540*. Международное общество состоит из 1978 граждан шести различных стран, занумерованных числами от 1 до 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равен сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

XX международная олимпиада, 1978 год. *Решение — в №12–1979*

1979 год

541. В компании из n человек у каждого ровно трое друзей.

а) n чётно. Докажите это.

б) Всегда ли такую компанию можно разбить на $n/2$ пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями? *Д.Н.Бернштейн. Решение — в №12–1979*

542. Дан прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с катетами $A_0A_2 = a$ и $A_1A_2 = b$. Муравей ползёт по бесконечной ломаной $A_2A_3A_4A_5A_6\ \ldots$, где A_nA_{n+1} — высота треугольника $A_{n-2}A_{n-1}A_n$. а) Найдите длину пути (состоящего из бесконечного числа отрезков).

б) Постройте предельную точку L, к которой приближается муравей. На каких расстояниях от катетов она находится? *П.Емельянов. Решение — в №12–1979*

543. Обозначим $\rho(x;y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$. Докажите для любых вещественных чисел a, b и c неравенство $\rho(a;c) \leqslant \rho(a;b) + \rho(b;c)$.
Andzei Paszkiewicz (Варшава) и Н.Б.Васильев. Решение — в №12–1979

544*. Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали, лежащей целиком внутри многоугольника, может иметь невыпуклый n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n = 4$, 5, 6, 7. *С.Бычков. Решение — в №12–1979*

545*. Нужно разместить в данных n точках плоскости по прожектору, каждый из которых освещает угол величиной $360^\circ/n$ так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) n — любое натуральное число.

г) Пусть теперь прожекторы освещают углы, величина каждого из которых меньше 180°, сумма величин которых равна 360°, все вершины которых расположены в одной точке которые освещают всю плоскость. Докажите, что можно параллельно перенести в каждую из данных точек по одному прожектору так, чтобы вся плоскость была по-прежнему освещена.
В.М.и Г.А.Гальперины. Решение — в статье «Освещение плоскости прожекторами» одиннадцатого номера 1981 года

546. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны, и перпендикуляры MR и MT — на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежат диагонали прямоугольника. *Десятиклассник Ваге Шафарян (Ереван) и И.Клумова. Решение — в №1–1980*

547. Чтобы уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах x и y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым. Докажите это. *А.Даниелян. Решение — в №1–1980*

548. а) На окружности расположены 4 точки. Для каждой пары этих точек через середину соединяющей их хорды проведём прямую, перпендикулярную хорде, соединяющей две другие точки. Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.

б) На окружности расположены 5 точек. Через центр тяжести трёх из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проведём прямую, перпендикулярную хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай n точек. *А.Лопшиц и Л.Лиманов. Решение — в №1–1980*

549. Рассмотрим натуральное число n. Выпишем все его делители d_1, d_2, ..., $d_{\tau(n)}$ и для каждого из них выясним, сколько делителей оно имеет. Докажите для полученных чисел $\tau(d_1)$, $\tau(d_2)$, ..., $\tau(d_{\tau(n)})$ равенство

$$(\tau(d_1)+\tau(d_2)+\ldots+\tau(d_{\tau(n)}))^2=\tau(d_1)^3+\tau(d_2)^3+\ldots+\tau(d_{\tau(n)})^3.$$

Например, число $n=6$ имеет $\tau(6)=4$ делителя: 1, 2, 3 и 6; при этом $\tau(1)=1$, $\tau(2)=2$, $\tau(3)=2$, $\tau(6)=4$ и $(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3$. *В.Э.Матизен.* *Решение — в №1–1980*

550. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно d км, должны добраться n велосипедистов, у которых имеется m велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью u км/ч или ехать на велосипеде со скоростью v км/ч. За какое наименьшее время все n велосипедистов смогут попасть из A в B? (Время считаем по последнему прибывшему. Велосипеды можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай: $m=2$, $n=3$. *С.С.Кротов.* *Решение — в №1–1980*

551*. Отметьте внутри выпуклого а) пятиугольника; б) n-угольника как можно меньше точек, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах многоугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка. *Московская олимпиада.* *Решение — в №2–1980*

552. а) Найдите хотя бы одну пару $(p; q)$ целых чисел, отличных от 0, для которых все корни каждого из трёхчленов x^3+px+q и x^3+qx+p целые.

б) Найдите все такие пары. *Э.Туркевич.* *Решение — в №2–1980*

553*. Дан треугольник ABC, причём $BC<AC<AB$. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE так, что $DB=BC=CE$. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него. *С.Мейдман.* *Решение — в №2–1980*

554*. Назовём натуральное число n хорошим, если существуют (не обязательно различные) такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_k, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$ и $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1$. Известно, что все числа между 33 и 73 — хорошие. Докажите, что все числа, большие 73,— тоже хорошие. *Олимпиада США, 1978 год.* *Решение — в №2–1980*

555. Рассмотрим пересечение а) двух; б) трёх цилиндров одинакового радиуса r, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объём? *С.Пухов и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №2–1980*

556. Обязательно ли конгруэнтны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей? *А.А.Егоров.* *Решение — в №2–1980*

557. Среди любых n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$, есть хотя бы одно простое число. Докажите это. *А.Т.Колотов.* *Решение — в №3–1980*

558. В круге расположено k чёрных секторов, $k>1$, величина угла каждого из которых меньше $180^\circ/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все чёрные сектора перейдут в белую часть круга. *В.В.Произволов, Н.Б.Васильев и Г.А.Гальперин.* *Решение — в №3–1980. Статья В.Чванова «Нет линии прямей кольца» седьмого номера 1991 года*

559. Если a, b, c — длины сторон треугольника, то $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1$. Докажите это. *А.В.Ермилов и В.А.Сендеров.* *Решение — в №3–1980*

560. В дне ящика есть дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если

а) дно ящика — квадрат 4×4, а дырка размером 1×1 расположена так, как показано на рисунке;

б) дно ящика — квадрат $n \times n$, где n нечётно, а дырка 1×1 расположена в центре;

в*) попробуйте решить аналогичную задачу для каких-либо других случаев, когда дно и дырка — выпуклые фигуры. *В.В.Батырев.* *Решение — в №3–1980*

561. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ площадей S_1 и S_2 расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 соответственно параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.
Л.П.Купцов. *Решение — в №3–1980. Статья «Семейство параллельных n-угольников» одиннадцатого номера 1974 года*

562. На отрезке $[0;1]$ задано такое множество, являющееся объединением нескольких отрезков, что расстояние между двумя точками множества M не равно $0{,}1$. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, меньше а) $0{,}55$; б) $0{,}5$.
Десятиклассник А.Кац. *Решение — в №4–1980*

563. Функция f определена на отрезке $[a;b]$ длиной 4 и имеет на нём непрерывную производную f'. Докажите, что внутри отрезка $[a;b]$ существует такая точка x, что $f'(x)-(f(x))^2 < 1$. *С.В.Фомин.* *Решение — в №4–1980*

564. Для каких точек M стороны BC треугольника ABC треугольник MPQ подобен треугольнику ABC, если точки P и Q являются для треугольников ABM и ACM а) центрами описанных окружностей; б) центрами тяжести (то есть точками пересечения медиан); в) ортоцентрами (точками пересечения высот).
Э.Туркевич. *Решение — в №4–1980*

565. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа; b_k — среднее арифметическое всевозможных произведений по k данных чисел, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Например, $b_1 = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, $b_2 = \frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n}{n(n-1)/2}$, $b_n = a_1a_2\ldots a_n$. Докажите неравенства

а) $b_1 \geqslant \sqrt{b_2}$;

б*) $b_k^2 \geqslant b_{k-1}b_{k+1}$ при $k = 2, 3, \ldots, n-1$;

в*) $\sqrt[k]{b_k} \geqslant \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ при $k = 2, 3, \ldots, n-1$.
М.Розенберг. *Решение — в №4–1980 и в статье М.Севрюка «Вариации на тему классических неравенств» пятого номера 1979 года*

566. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат соответственно на трёх сторонах другого? *В.В.Батырев и А.Б.Сосинский.* *Решение — в №5–1980*

567. Натуральные числа q и p взаимно просты. Отрезок $[0;1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$.
А.А.Егоров. *Решение — в №5–1980*

568*. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, равны между собой, то $ABCD$ — ромб;

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, равны между собой, то $ABCD$ — прямоугольник.
Н.Б.Васильеви и А.А.Егоров. *Решение — в №6–1980*

569. В тетради написаны несколько чисел. К этим числам разрешено приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что начав с чисел 0 и 1, таким образом можно получить: а) число $1/5$; б) любое рациональное число, расположенное между 0 и 1. *М.Серов. Решение — в №5–1980*

570.* Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что ими можно покрыть квадрат площади 1. *А.Вайнтроб и Г.А.Гальперин. Решение — в №6–1980*

571. Убывающая последовательность x_1, x_2, x_3, $\ldots$ положительных чисел такова, что при любом натуральном n сумма $\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}$ не превосходит 1. а) Для любого натурального n докажите неравенство $\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}<2$. б) Докажите, что в пункте а) число 2 нельзя заменить ни на какое меньшее число. *З.Чантурия. Решение — в №6–1980*

572. Кенгуру прыгает по точкам координатной плоскости Oxy, обе координаты которых неотрицательны, следующим образом: из точки $(x;y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1;y-1)$ или в точку $(x-5;y+7)$, причём прыгать в точки, у которой есть отрицательная координата, нельзя. Из каких начальных точек $(x;y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек и найдите его площадь. *А.Г.Кушниренко и А.Б.Сосинский. Решение — в №6–1980*

573. Через точку O а) на плоскости; б) в пространстве проведено 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать такие точки $A_k \in l_k$, где $k=2, 3, \ldots, 1979$, что $A_1A_3 \perp l_2$, $A_2A_4 \perp l_3$, $\ldots$, $A_{1977}A_{1979} \perp l_{1978}$, $A_{1978}A_1 \perp l_{1979}$, $A_{1979}A_2 \perp l_1$. *Б.Агафонов и Н.Б.Васильев. Решение — в №7–1980*

574.* Конечная последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_n состоит из нулей и единиц и удовлетворяет следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма $a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$ нечётна.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите существование такой последовательности хотя бы для одного $n>1000$. *С.В.Конягин, Н.Б.Васильев и А.А.Разборов. Решение — в №6–1980. Статья В.Чванова «Нет линии прямей кольца» седьмого номера 1991 года*

575.* На прямой по порядку расположены точки A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_n так, что длины отрезков A_0A_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это можно сделать для а) $k=3$; б) любого натурального $k<n$. *В.Гринберг и В.М.Гальперин. Решение — в №7–1980*

576. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A;B)$ этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причём так, что в каждой точке оканчивается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$. *В.В.Произволов. XIII Всесоюзная олимпиада. Решение — в №7–1980*

577. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами а) 8×8; б) $n\times n$, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставим в центры полей.) *Н.Б.Васильев. XIII Всесоюзная олимпиада. Решение — в №7–1980*

578. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b, \end{cases}$$

где a и b — данные числа.

В.Л.Гутенмахер. XIII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №8–1980. Статья «Системы линейных уравнений» первого номера 1984 года*

579. Для любых чисел x_1, x_2, ..., x_n отрезка $[0;1]$ докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

А.И.Плоткин и С.В.Фомин. XIII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №8–1980*

580. В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у любого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Отношение вражды симметрично: если Ашкин — враг Бэшкина, то и Бэшкин — враг Ашкина.) *О.Бородин. XIII Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №8–1980. Статья Л.Д.Курляндчика и Д.В.Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года*

581. а) Существует ли трёхзначное число, куб которого оканчивается на три семёрки?

б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых — не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр? *А.Броцкий.* *Решение — в №8–1980*

582. В окружность с центром O вписан четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки O до любой его стороны равно половине длины противоположной стороны. *А.В.Келарев и И.Клумова.* *Решение — в №8–1980*

583. Рассмотрим набор камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора — 50 кг. Из такого набора выберем несколько камней, сумма масс которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число D. Какое наибольшее значение может принять число D?

А.Вайнтроб и А.Печковский. *Решение — в статье А.Вайнтроба «Лучше — поровну», №8–1980*

584. Можно ли представить всё пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых — скрещивающиеся (то есть не лежат в одной плоскости)?

Ф.В.Вайнштейн и Н.Б.Васильев. *Решение — в №8–1980*

585. На химической конференции присутствовали N учёных — химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. На любой вопрос химики отвечают правдиво, а алхимики иногда говорят правду, иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного должен выяснить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: «Кем является такой-то — химиком или алхимиком?» (В частности: «Кто Вы?») Докажите, что математик может выяснить всё, что требуется а) за $4N$ вопросов; б) за $2N - 2$ вопроса; в*) постарайтесь придумать способ, позволяющий установить, кто — химик, а кто — алхимик, за меньшее число вопросов (авторам известен довольно громоздкий способ, позволяющий сделать это за $[3N/2]$ вопросов).

С.В.Конягин и П.Блехер. *Статья «О людях правдивых, лгунах и обманщиках» одиннадцатого номера 1980 года*

586. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC, у которого $\angle ABC = 60^\circ$, пересекаются в точке I. Докажите равенство $DI = IE$.

В.Л.Гутенмахер. Всероссийская олимпиада, 8 класс, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

587. Дана тройка чисел 2, $\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$. Разрешено любые два из них заменить двумя такими: их суммой, делённой на $\sqrt{2}$, и их разностью, также делённой на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$?
Н.Б.Васильев. Всероссийская олимпиада, 9 класс, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

588. а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его рёбрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им рёбер равна трём.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости).
Э.Ясиновый. Всероссийская олимпиада, 9 класс, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

589*. На плоскости дан набор из n векторов, длина ни одного из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор n векторов, длина суммы которых не превосходит а) $\sqrt{n}$; б) $\sqrt{2}$.
П.Б.Гусятников и А.И.Плоткин. Всероссийская олимпиада, 9 класс, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

590. а) Найдите наименьшее значение выражения $|\cos x| + |\cos 2x|$.

Докажите, что для любого числа x и любого натурального n сумма $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x|$ не меньше б) $n/4$; в*) $n/2$.
П.Б.Гусятников. Всероссийская олимпиада, 10 класс, 1979 год *Решение — в №8–1980*

591. Если m и n — такие натуральные числа, что

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319},$$

то m делится на 1979. Докажите это.
А.П.Савин. XXI международная олимпиада, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

592. Для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне. Докажите это.
С.Овчинников и И.Клумова. *Решение — в №8–1980*

593. Внутри окружности γ расположены n кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длины окружности γ, если

а) $n = 2$;

б) центры всех n кругов лежат на одном диаметре окружности γ;

в) все n кругов содержат центр окружности γ.
Ф.Кабдыкаиров, В.В.Произволов и С.Казаков. *Решение — в №8–1980*

594*. Найдите все действительные числа a, для которых существуют такие действительные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, что $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = a$, $x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 + 125x_5 = a^2$ и $x_1 + 32x_2 + 243x_3 + 1024x_4 + 3125x_5 = a^3$.
А.П.Савин. XXI международная олимпиада, 1979 год. *Решение — в №8–1980*

595. Пусть A и E — противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, лягушка может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, лягушка останавливается и остаётся там. Пусть a_n — количество способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Докажите для любого натурального n равенства $a_{2n-1} = 0$ и $a_{2n} = \frac{((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1})}{\sqrt{2}}$.
XXI международная олимпиада, 1979 год. *Решение — в статье Н.Вагутена «Сопряжённые числа» второго номера 1980 года*

596. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Каждое ребро оснований и все отрезки A_jB_k, где $1 \leqslant j, k \leqslant 5$, окрашены в красный или в зелёный цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть стороны разного цвета. Докажите, что все десять рёбер оснований окрашены одинаково.
А.П.Савин. XXI международная олимпиада, 1979 год. Решение — в №9–1980

597. Обозначим $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

а) Докажите существование предела $\gamma = \lim\limits_{m\to\infty}(x_n - \ln n)$.

б) Для любых натуральных m и n докажите неравенство $\gamma < x_m + x_n - x_{mn} \leqslant 1$.

в) Найдите γ с точностью до 0,01. *В.Ясинский. Решение — в №8–1980*

598. Дана плоскость α, точка P на этой плоскости и точка Q вне этой плоскости. Найдите все точки R на плоскости α, для которых частное $(QP + PR)/QR$ максимально возможно. *А.П.Савин. XXI международная олимпиада, 1979 год. Исправление опечатки в условии — во втором номере 1980 года. Решение — в №9–1980*

599. а) Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

б*) Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число $1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}$. *П.Б.Гусятников и А.Вайнтроб. Исправление опечатки в условии — во втором номере 1980 года. Решение — в №9–1980*

600. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов всё время равны, если они едут а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях. *Н.Б.Васильев и И.Ф.Шарыгин. XXI международная олимпиада, 1979 год. Решение — в №10–1980 и в статье В.Ю.Протасова «О двух велосипедистах и вишнёвой косточке» третьего номера 2008 года*

1980 год

601. Середина стороны BC любого треугольника ABC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника ABC с точкой описанной окружности треугольника ABC, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам. Докажите это. *Десятиклассник Г.Грошев и И.Клумова.* *Решение — в №10–1980*

602. В седьмой строке треугольника Паскаля есть три подряд стоящих числа, образующих арифметическую прогрессию: $C_7^1 = 7$, $C_7^2 = 21$ и $C_7^3 = 35$. (Седьмая строка состоит из восьми чисел. Самую верхнюю строку треугольника Паскаля, состоящую из одной лишь единицы, принято считать строкой номер 0.)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
. . . .

а) В какой следующей строке это повторится?

б) Какие строки треугольника Паскаля содержат арифметическую прогрессию из трёх подряд идущих чисел?

А.Абрамов. *Статья «Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля» одиннадцатого номера 1980 года*

603.* Решите систему уравнений. *Л.П.Купцов.* *Решение — в №10–1980*

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

604. а) Андрей, Виктор и Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках A_0, B_0 и C_0 и тут же нырнули снова, причём Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор — треть пути до Сергея, а Сергей — треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки A_1, B_1 и C_1 на рисунке) и повторили манёвр уже за полминуты, потом за четверть минуты и так далее. Где и когда они встретились?

б*) Внутри сферы радиусом 1 км расположен миллион точек, занумерованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка движется к следующей по номеру на $1/3$ расстояния до этой точки; последняя точка точно так же движется к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри сферы радиусом 1 мм.

Н.Б.Васильев. *Решение — в статье «К центру тяжести» третьего номера 1981 года*

605. На плоскости отмечены $2n + 1$ различных точек. Занумеруем их первыми $2n + 1$ натуральными числами и рассмотрим следующее преобразование плоскости: сначала выполняем симметрию относительно первой точки, затем — относительно второй, третьей и так далее вплоть до $(2n + 1)$-й точки.

а) Докажите, что у этого преобразования есть единственная неподвижная точка (то есть точка, которая переходит в себя).

Рассмотрим всевозможные нумерации данных $2n+1$ точек числами от 1 до $2n+1$. Каждой такой нумерации соответствует своя композиция центральных симметрий и своя неподвижная точка. Рассмотрим множество F всех таких неподвижных точек.

б) Найдите множество F для $n = 1$.

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество F при каждом данном $n = 1, 2, 4, 5, 6, 7, \ldots$?

А.Талалай и И.Клумова. Решение — в №11–1980

606. Функция f такова, что для любого действительного числа x верно равенство

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x).$$

Докажите, что f — периодическая функция. *Э.Туркевич. Решение — в №11–1980*

607. На равнобедренные трапеции можно разрезать а) квадрат; б) равнобедренный прямоугольный треугольник; в) любой треугольник. Докажите это.

В.Ф.Лев. Решение — в №11–1980

608. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован n-угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечётную длину. Докажите, что

а) n делится на 4.

б*) при $n = 100$ площадь этого n-угольника обязательно нечётна. Выясните, какова чётность площади при других n.

Десятиклассник М.Л.Концевич. Решение — в №11–1980. Статья Н.Вагутена и А.Старцева «Формула площади» четвёртого номера 1981 года

609. а) Площадь многоугольника не превосходит произведения длин его проекций на две взаимно перпендикулярные прямые.

б) Объём многогранника не превосходит произведения длин его проекций на три взаимно перпендикулярные прямые.

в) Квадрат объёма выпуклого многогранника не превосходит произведения площадей его проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости. Докажите это.

Ю.Смирнов, Н.Б.Васильев и А.А.Егоров. Решение — в №12–1980

610. Фиксируем натуральное число k.

а) Рассмотрим множество всех таких наборов целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant k$; обозначим количество таких наборов буквой N. Рассмотрим среди них те наборы, в которых $a_k = k$; обозначим их количество буквой M. Докажите равенство $N = 2M$.

б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ должна делиться на k. Обозначим соответствующие количества через n и m. Докажите равенство $n = 2m$.

Например, при $k = 3$ имеем $M = 9$, $N = 18$, $m = 4$ и $n = 8$. *А.К.Толпыго. Решение — в №12–1980*

0	0	0	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	1	1	0	2	3
1	1	1	0	3	3
0	0	2	1	1	3
0	1	2	1	2	3
0	2	2	1	3	3
1	2	2	2	3	3
2	2	2	3	3	3

611. На хорде AB окружности с центром O берём произвольную точка M. Через точки A, M и O проведём окружность, пересекающую первую окружность в точках A и C. Докажите равенство $MB = MC$. *Десятиклассник Сергей Колпаков. Решение — в №1–1981*

612. Возрастающая последовательность натуральных чисел такова, что каждый следующий её член не более чем вдесятеро превосходит предыдущий. Докажите, что если все числа этой последовательности записать подряд без пробелов и запятых, то полученная последовательность цифр не будет периодической.

А.Карагулян. Решение — в №1–1981

613. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB, BEC и CFA (а именно, $AD : DB = BE : EC = CF : FA = k$; величины углов ADB, BEC и CFA равны α). Докажите, что:

а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;

б) величины двух углов этого параллелограмма равны α, а отношение длин сторон равно k.

Л.П.Купцов. Решение — в №1–1981

614. Для каждого натурального n через $S(n)$ обозначим сумму цифр десятичных записей всех натуральных чисел от 1 до n. Например, $S(1) = 1$, $S(2) = 1 + 2 = 3$, $S(3) = S(2) + 3 = 6, \ldots, S(9) = 45$, $S(10) = S(9) + 1 + 0 = 46$, $S(11) = S(10) + 1 + 1 = 48$, $S(12) = S(11) + 1 + 2 = 51$.

а) Найдите $S(100)$.

б) Докажите равенство $S(10^k - 1) = 45k \cdot 10^{k-1}$ для любого натурального n.

в) Для любого двузначного числа $\overline{ab}$ имеем $S\left(\overline{ab}\right) = 5a^2 + ab + 41a + \frac{b(b+1)}{2}$.

г) Найдите аналогичную формулу для $S\left(\overline{abc}\right)$.

д) Вычислите $S(1980)$.

А.Пашевич (Польша) и И.Клумова. Решение — в №1–1981

615. Периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров её граней. Докажите это.

В.А.Сендеров. Решение — в №1–1981

616. Можно ли числа 1, 2, ..., 30 разбить на множества по а) пять; б) шесть чисел так, чтобы суммы чисел во всех множествах были одинаковыми?

в) При каких n и k числа 1, 2, ..., nk можно разбить на n множеств по k чисел так, чтобы суммы чисел во всех множествах были одинаковыми?

С.Т.Берколайко и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1981

617. Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ и δ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β и γ касается двух сторон треугольника и окружности δ. Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.

А.П.Савин и В.Ягубьянц. Решение — в №2–1981

618*. а) Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что $n!$ делится на $n^2 + 1$. Докажите это.

б) Для любого положительного числа α существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что $[\alpha n]!$ делится на $n^2 + 1$. Докажите это.

А.Вайнтроб, В.Юдаков и десятиклассник А.Сивацкий. Решение — в №2–1981 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» четвёртого номера 2002 года

619. Если для вписанного четырёхугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD. Докажите это.

И.Ф.Шарыгин. Решение — в №2–1981. Статья В.Ю.Протасова и В.М.Тихомирова «Геометрические шедевры Шарыгина» первого номера 2006 года

620. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, сумма квадратов которых равна 1. Докажите, что сумма 2^n модулей чисел $\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ (со всевозможными комбинациями знаков «$+$» и «$-$») не превосходит 2^n.

Я. Касаковских и И. Клумова. *Решение — в №2–1981. Статья М. Горелова «Правило Декарта» третьего номера 2005 года*

621. Вокруг окружности описан n-угольник. Произвольная точка P внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся $2n$ треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников. *У. Алла и Н. Б. Васильев.* *Решение — в №2–1981*

622. Количество решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2 + t^2 + 1$ в натуральных числах, не превосходящих 10 000 000, меньше количества решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ в натуральных числах, не превосходящих 10 000 000. Докажите это.

В. В. Вавилов. *Решение — в №3–1981*

623. а) Сколько осей симметрии имеет куб? Правильная треугольная пирамида?

б*) Если некоторый многогранник имеет k осей симметрии, где $k > 0$, то k нечётно. Докажите это. *Н. Б. Васильев, В. А. Сендеров и А. Б. Сосинский.* *Решение — в №3–1981*

624. Найдите последовательность, определяемую условиями $a_1 = 1$ и $1 + \sum_{n\,\vdots\, d} (-1)^{n/d} a_d = 0$.

Например, если p — простое число, то $1 + (-1)^p - a_p = 0$, откуда $a_p = 2$ при $p = 2$ и $a_p = 0$, если $p > 2$. *В. Абрамович.* *Решение — в №3–1981*

625*. На координатной плоскости заданы четыре точки с рациональными координатами, не лежащие в вершинах параллелограмма, причём никакие три из них не принадлежат одной прямой. Разрешено проводить прямую через любые две уже полученные точки и отмечать точку пересечения любых двух проведённых прямых. Докажите, что множество точек, которые можно получить таким образом,— это множество всех точек плоскости с рациональными координатами, если четыре точки — вершины а) трапеции; б) произвольного четырёхугольника.

Ю. В. Михеев. *Решение — в статье «Одной линейкой» десятого номера 1980 года*

626. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей чёрных клеток равна сумме площадей белых клеток.

В. В. Произволов. *Решение — в №3–1981*

627. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел!) Докажите, что для любого заданного m найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел которых не меньше m.

б*) Пусть каждое натуральное число n встречается ровно n раз (то есть 1 — единожды, 2 — дважды и так далее). Укажите наибольшее число k такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше k.

А. К. Толпыго. *Решение — в №3–1981*

628. На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину 120°. Докажите, что «медиана», опущенная на эту «сторону», делится каждой из двух других «медиан» на две равные части. («Медианы» и «стороны» — дуги больших окружностей.) *А. Ягубьянц.* *Решение — в №4–1981*

629. Докажите следующие утверждения.

а) Число $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27 при любом натуральном n.

б) Если a, b, m — натуральные числа, а числа $a + b$ и $a^2 + b^2$ делятся на m, то $a^n + b$ делится на m для любого натурального n.

в) Если a, b_0, b_1, ..., b_k, m — натуральные числа, а число $f(n) = a^n + b_0 + b_1 n + \ldots + b_k n^k$ делится на m при $n = 1, 2, \ldots, k + 1, k + 2$, то $f(n)$ делится на m при любом натуральном n.

Н.Б.Васильев и Т.Маликов. Решение — в статье «Рассмотрим разность» шестого номера 1981 года

630. На плоскости даны окружность γ и точка K. Проведём через произвольные точки P, Q окружности γ и точку K окружность. Пусть M — точка пересечения прямой PQ с касательной к этой окружности, проведённой в точке K. Какое множество заполняют точки M? *И.Ф.Шарыгин. Решение — в №4–1981*

631. Двузначные числа от 19 до 80 выписали подряд: 1920212223...7980. Делится ли полученное число на 1980? *В.Федотов. Всесоюзная олимпиада 1980 года. Решение — в №4–1981*

632. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они могут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.

А.Т.Колотов. Всесоюзная олимпиада 1980 года. Решение — в №4–1981

633. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через неё хорду BD так, чтобы площадь четырёхугольника $ABCD$ была наибольшей.

И.Ф.Шарыгин. Всесоюзная олимпиада 1980 года. Решение — в №4–1981. Статья В.Ю.Протасова и В.М.Тихомирова «Геометрические шедевры Шарыгина» первого номера 2006 года

634. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое натуральное n, что $n + S(n) = 1980$?

б) Хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n + S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n. Докажите это.

С.В.Конягин. Всесоюзная олимпиада 1980 года. Решение — в №4–1981

635. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Каждый коротышка болеет гриппом один день, причём после этого у него ещё один день есть иммунитет, то есть он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что

а) возможна ситуация, когда до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, а эпидемия продолжается сколь угодно долго;

б) если в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

А.Т.Колотов, А.Н.Земляков и Ю.П.Лысов. Всесоюзная олимпиада 1980 года. Решение — в №4–1981

636. Множество A состоит из натуральных чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент множества A, кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих A. Укажите среди всех множеств A, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов. *Ю.В.Нестеренко. XIV Всесоюзная олимпиада, 1980 год.* Решение — в №5–1981

637. Дан равносторонний треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Найдите величины углов треугольника DEC. *Л.П.Купцов. XIV Всесоюзная олимпиада, 1980 год.* Решение — в №5–1981

638. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги выкрашены в красный цвет, остальные — в синий, причём так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11?
Н.Карташов. XIV Всесоюзная олимпиада, 1980 год. Решение — в №5–1981

639. Рёбра AC и CB тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Перпендикулярны и рёбра AD и DB. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше отношения CD/AB. *Ю.В.Нестеренко. XIV Всесоюзная олимпиада, 1980 год.* Решение — в №5–1981

640. Число x лежит на отрезке $[0;1]$ и записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив её первые 5 цифр после запятой, получаем новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому новому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со второй по шестую (после запятой), получаем десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичную запись числа x_k получаем, переставляя в десятичной записи числа x_{k-1} цифры с k-й по $(k+4)$-ю (после запятой).

а) Докажите, что как бы ни переставляли цифры на каждом шаге, получаемая последовательность x_1, x_2, x_3, ... имеет некоторый предел.

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса получить из рационального числа иррациональное.

в) Придумайте число, для которого описанный процесс всегда приводит к иррациональному числу, каковы бы ни были перестановки пятёрок цифр на каждом шаге. *Н.Карташов. XIV Всесоюзная олимпиада, 1980 год.* Решение — в №5–1981

641. O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что а) площади треугольника ABL и четырёхугольника $DMLN$ равны; б) величины углов ALO и OLN равны 60°; в) угол OLD прямой. *Э.Г.Готман.* Решение — в №6–1981

642. Каждое натуральное число представимо в виде $a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n$, где каждое из чисел a_0, a_1, ..., a_n равно -1, 0 или 1, причём произведение любых двух соседних чисел последовательности a_0, a_1, ..., a_n равно 0. Докажите это и докажите, что такое представление единственно. (Например, $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 4 - 1$, $5 = 4 + 1$, $6 = 8 - 2$, $7 = 8 - 1$, $9 = 8 + 1$, $10 = 8 + 2$, $11 = 16 - 4 - 1$, $12 = 16 - 4$, $13 = 16 - 4 + 1$.) *И.Жук и Н.Б.Васильев.* Решение — в №6–1981

643. Карточки с числами 1, 2, ..., 31, 32 сложены в стопку по порядку. Разрешено снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно. Эту операцию назовём перемешиванием. Докажите, что за 5 перемешиваний можно

а) переложить карточки в обратном порядке;

б) разложить карточки в любом порядке.

в) Не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания. Докажите это. *В.Турчанинов и Ю.П.Лысов.* Решение — в №6–1981

644. а) Существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длины 1, 2, ..., 1980, величины всех углов которого равны. Докажите это.

б) Существует ли такой 1981-угольник? *Г.А.Гуревич.* *Решение — в №6–1981*

645*. В подвале три коридора, все выходы из которых закрыты. $OA = OB = OC = 1$. В подвале находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит r. Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке O и не видит преступника. Подскажите, как может Варнике наверняка поймать преступника, если а) $r = l/3$; б) $r = l/4$; в) $r > l/5$; а) $r > l/7$. Шириной коридоров и размерами людей пренебрегите. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нём заранее знает, преступник всё равно не мог ускользнуть.)

В.Дринфельд и В.В.Соколов. *Решение — в №7–1981*

646. От точки на плоскости отложено чётное число векторов длины 1. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Докажите, что длина разности суммы красных векторов и суммы синих векторов не превосходит 2.

Е.Шустин. *Решение — в №7–1981*

647. Для любых a и b, где $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant b$, докажите неравенство $\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}$.

С.В.Фомин. *Решение — в №7–1981*

648. Если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности. Докажите это.

И.Ф.Шарыгин. *Решение — в №7–1981*

649. Пусть $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + \frac{1}{3}$, $c_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, ..., $c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$. Докажите равенство $\frac{c_n^2}{2} + (c_n - c_1)^2 + (c_n - c_2)^2 + \ldots + (c_n - c_{n-1})^2 = \frac{n}{2}$.

С.Л.Манукян. Поправка к условию — на странице 19 двенадцатого номера 1980 года. *Решение — в №7–1981*

650*. Существует ли такая последовательность

а) натуральных чисел, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде суммы нескольких её членов (сумма может состоять и из одного только слагаемого);

б) натуральных чисел, что число 1 не принадлежит последовательности, а любое другое натуральное число единственным образом представимо в виде суммы нескольких её членов (сумма может состоять и из одного только слагаемого);

в) целых чисел, что 0 не принадлежит последовательности и не является суммой никакого множества её членов, а любое целое число, отличное от 0, единственным образом представимо в виде суммы нескольких её членов (сумма может состоять и из одного только слагаемого);

г) целых чисел, что ни 0, ни 1 не принадлежат последовательности и не являются суммами никакого множества её членов, а любое целое число, отличное от 0 и 1, единственным образом представимо в виде суммы нескольких её членов (сумма может состоять и из одного только слагаемого)? *А.А.Разборов.* *Решение — в №7–1981*

651. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько корзина, картина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну, и каждая из них больше, чем

собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если с ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.
А.Л.Тоом и В.Л.Гутенмахер. Решение — в №7–1981

652. Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по рёбрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Могло ли случиться, что многогранники Жени и Вити не равны?
Н.Б.Васильев. Решение — в №7–1981

653. Имеется линейка с двумя делениями. С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и откладывать отрезки определённой длины. Постройте с её помощью а) какой-нибудь прямой угол; б*) прямую, перпендикулярную данной прямой.
В.Л.Гутенмахер. Решение — в №7–1981

654. Из любых ли шести натуральных чисел можно выбрать три числа, никакие два из которых не имеют общих делителей, больших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?
Ж.М.Раббот. Решение — в №7–1981

655. На столе у чиновника Министерства околичностей лежат n томов Британской энциклопедии, сложенной в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берёт из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Кроме этого, чиновник никогда ничего не делает.

а) Какая запись будет сделана в ведомости через месяц, если общее количество томов $n = 3$, 6 или 10? (Начальное расположение произвольно.)

б) Если общее число томов имеет вид $k(k+1)/2$, где k — натуральное число, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями. Докажите это.

в) Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях величины n.
С.Лиманов и А.Л.Тоом. Решение — в №7–1981

656. Среди любых 30 ненулевых векторов пространства есть такие два вектора, величина угла между которыми меньше 45°. Докажите это.
А.К.Толпыго. Решение — в №8–1981

657. В квадратной таблице, заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.
А.В.Анджанс. Решение — в №8–1981

658. В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков, параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведённых отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.
А.В.Анджанс. Решение — в №8–1981

659*. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи, первые два члена которой равны 1, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих: $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ и $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ для любого натурального n.

а) Каждое натуральное число является числом Фибоначчи или суммой двух или более разных чисел Фибоначчи.

б) Количество таких представлений любого данного натурального числа в виде суммы чётного числа слагаемых отличается от количества таких представлений в виде суммы нечётного числа слагаемых не более чем на 1.

в) Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, $1-x^5$, $\ldots$, $1-x^{\varphi_n}$, $\ldots$, то все коэффициенты полученного многочлена равны -1, 0 или 1.

г) Любое натуральное число, начиная с числа 2, можно, причём единственным образом, представить в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которая вместе с каждым слагаемым содержит хотя бы одно из двух предшествующих чисел Фибоначчи (если хоть одно такое существует): $2=\varphi_2+\varphi_1$, $3=\varphi_3+\varphi_1$, $4=\varphi_3+\varphi_2+\varphi_1$, $5=\varphi_4+\varphi_2+\varphi_1$, $6=\varphi_4+\varphi_3+\varphi_1$, $7=\varphi_4+\varphi_3+\varphi_2+\varphi_1$, $8=\varphi_5+\varphi_3+\varphi_1$, $9=\varphi_5+\varphi_3+\varphi_2+\varphi_1$, $10=\varphi_5+\varphi_4+\varphi_2+\varphi_1$, $\ldots$ (Известные нам доказательства утверждений б) и в) опираются именно на это утверждение.)

Десятиклассник А.Одесский и Д.Б.Фукс. *Решение — в №8–1981*

660. На окружности расставлены синие и красные точки. Разрешено добавить одну точку и одновременно поменять цвета обеих её соседних точек, либо убрать красную точку и поменять цвета обеих её бывших соседок. Первоначально было всего две красные точки. Меньше двух точек оставлять нельзя. Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности а) две точки — синюю и красную; б) 8 красных точек; в) 8 красных точек; г) одну красную и 6 синих точек?

К.Казарновский. *Решение — в №8–1981*

1981 год

661. На берегу круглого озера четыре пристани K, L, P и Q. От пристани K отплывает катер, от L — лодка. Если катер поплывёт прямо в P, а лодка — прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывёт в Q, а лодка в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №9–1981*

662. В копилке собрано четыре рубля медными монетами (по 1, 3 и 5 копеек). Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.

А.Г.Кушниренко. *Решение — в №9–1981*

663. Найдите все такие простые числа p, что число $2^p + p^2$ тоже простое.

С.Майзус. *Решение — в №9–1981*

664*. Дан четырёхугольник $ABCD$. Обозначим точки пересечения высот треугольников ABC, BCD, CDA и DAB буквами N, K, L и M соответственно. Докажите равенство площадей четырёхугольников $NKLM$ и $ABCD$.

В.В.Батырев и В.Трофимов. *Решение — в №9–1981*

665*. Световое табло состоит из нескольких ламп, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора ламп (для каждой кнопки — своего). Вначале лампы не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло,— степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из mn лампочек, расположенных в форме прямоугольника размером $m \times n$, если кнопками можно переключить как любой горизонтальный, так и любой вертикальный ряд ламп? (Проверьте ваш ответ для небольших значений m и n.)

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопками), в которых можно найти число узоров.

Н.Б.Васильев и десятиклассница Н.Гринберг. *Решение — в №9–1981*

666. Наименьшее общее кратное любых n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ не меньше na_1. Докажите это.

А.А.Разборов. *Решение — в №10–1981*

667. Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол A и отрезки с длинами $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1981*

668*. Последовательность x_1, x_2, x_3, ... определена условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_{n+1} = x_{n-2} + 2x_{n-1}$. Докажите, что для любого натурального m существуют два соседних члена этой последовательности, каждый из которых кратен m.

Г.Козлов. *Решение — в №10–1981*

669. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что

а) отрезок, соединяющий середины дуг AB и CD, перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг BC и AD;

б) центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

К.Малхасян и И.Герман. *Решение — в №10–1981*

670*. а) Дано несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями (точки таких пар называем соседями). Число соседей у каждой точки нечётно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета — красный и синий. Затем каждую минуту происходит одновременное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от неё цвет, меняет свой цвет; в противном случае её цвет сохраняется. Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту.

б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечётно? *О.Козлов. Решение — в №10–1981*

671. Во вписанном четырёхугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите равенство квадрата длины первой диагонали половине суммы квадратов длин всех сторон четырёхугольника. *Р.Мазов. Решение — в №11–1981*

672. Пусть a — такое натуральное число, что $2^a - 2$ делится на a (например, $a = 3$). Рассмотрим последовательность, первый член которой равен $x_1 = a$, а каждый очередной член определён формулой $x_{n+1} = 2^{x_n} - 1$. Докажите, что $2^{x_n} - 2$ делится на x_n для любого натурального n. *Вальтер Яноус (Инсбрук, Австрия). Решение — в №11–1981.*
Статья И.Яглома «Почти простые числа» девятого номера 1981 года. Статья В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Малая теорема Ферма» третьего номера 2000 года

673. На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист выбирает одну из них и бьёт по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке.

а) Покажите, как после пяти ударов шайба сможет вернуться на своё место, а шайбы A и B поменяться местами.

б) Могут ли все три шайбы A, B и C вернуться на свои прежние места после 25 ударов? *А.А.Разборов. Решение — в №11–1981*

674. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника взяты точки A', B' и C' соответственно. Центр описанной окружности треугольника ABC совпал с точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Докажите подобие треугольников ABC и $A'B'C'$. *Д.Изаак. Решение — в №11–1981*

675*. Системой разновесов назовём множество натуральных чисел, из которого нельзя извлечь два различных подмножества с одинаковой суммой (например, числа 24, 23, 22, 20, 17, 11 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 не образуют: $2 + 3 + 4 = 1 + 8$). Докажите, что из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов из а) 10; б) 11 чисел.

в) Докажите, что 14 чисел из них выбрать нельзя.

г) Докажите, что если числа образуют систему разновесов, то сумма их обратных величин не превосходит 5/2.

д) Выберите из чисел, меньших 700, систему разновесов из 11 чисел.
Г.А.Гуревич и А.Т.Колотов. Статья «Системы разновесов» двенадцатого номера 1981 года

676. Для любого натурального m сумма цифр десятичной записи числа 1981^m не меньше 19. Докажите это. *А.В.Савкин. Решение — в №12–1981*

677. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка M, являющаяся точкой пересечения а) медиан; б) биссектрис; в) высот. Если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB, MBC, AMC, равны, то треугольник ABC равносторонний. Докажите это. *Э.Туркевич и А.А.Егоров. Решение — в №12–1981*

678. $2m$-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что любое $(2m+1)$-значное число можно вычёркиванием одной цифры сделать справедливым. (Например, в числе 12345 можно зачеркнуть цифру 3.) *А. Сидоренко.* Решение — в №12–1981

679. а) На плоскости расположены четыре круга так, что первый касается второго в точке A, второй третьего — в точке B, третий четвёртого — в точке C, а четвёртый первого — в точке D. Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

б) В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке A, второй третьего — в точке B, третий четвёртого — в точке C, а четвёртый первого — в точке D. Докажите, что через четыре названные точки лежат в одной плоскости.

в) В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трёх других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости. *В.В. Произволов.* Решение — в №12–1981

680. Два связиста играют в такую игру. Имеются n телефонных узлов, и связисты по очереди соединяют кабелем два из них по своему выбору. Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (быть может, через несколько промежуточных; начало игры изображено на рисунке).

а) Выясните, кто выигрывает при $n = 4, 5, 6, 7, 8$ — начинающий или его партнёр?

б) Каков ответ при произвольном n?

в) Пусть игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на вопросы пунктов а) и б) для этой новой игры.

г) Пусть вначале каждые два узла связаны кабелем, а связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связность схемы, проигрывает. Вопрос тот же: кто выигрывает при правильной стратегии для $n = 4, 5, 6, 7, 8$? А для произвольного n?

Замечание. Можно рассмотреть четвёртый вариант: считать, что в пункте г) игрок, нарушивший связность, выигрывает. Полное исследование этого варианта игры автору неизвестно. *А.А. Разборов.* Решение — в №12–1981

681. а) Придумайте такие натуральные числа a, b, c и d, что числа a^2+b^2, $a^2+b^2+c^2$ и $a^2+b^2+c^2+d^2$ — квадраты целых чисел.

б) Существует ли такая последовательность, состоящая из квадратов натуральных чисел, что при любом n сумма n её первых членов — квадрат целого числа? *Г. Григорьев и Н.Б. Васильев.* Решение — в №1–1982

682. Внутри треугольника нужно расположить другой треугольник так, чтобы у каждого из трёх квадратов, построенных на сторонах внутреннего треугольника во внешнюю сторону, две вершины лежали на разных сторонах исходного треугольника.

а) Докажите, что медианы исходного треугольника перпендикулярны сторонам внутреннего треугольника.

б) Для любого ли исходного остроугольного треугольника такое построение возможно? *А.А. Ягубьянц и А.А. Егоров.* Решение — в №1–1982

683. Несколько одинаковых кругов положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что круги можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся круга будут окрашены в разные цвета. Нарисуйте расположение кругов, при котором трёх цветов для такой раскраски недостаточно.
Г.Рингель и В.Покровский. Решение — в №1–1982

684*. Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске $n\times n$ несколько непересекающихся «кораблей» $n\times 1$ (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному числу полей следует нанести удары, чтобы по ответу противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите случаи, когда n равно а) 4; б) 10. в) А если n — любое натуральное число?
Е.Я.Гик и Н.Б.Васильев. Решение — в №1–1982

685*. Два подмножества множества натуральных чисел называют конгруэнтными, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества чётных и нечётных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (не пересекающих друг друга) бесконечных конгруэнтных подмножеств?
А.Фёдоров и С.Шлосман. Неверное решение — в №1–1982, верное — в статье С.А.Генкина и Л.Д.Курляндчика «Числовые конструкции» в девятом номере за 1990 год

686. Для любого ли числа x, удовлетворяющего неравенству $x\geqslant 1$, верно равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

В.В.Прасолов. Решение — в №2–1982. Поправка к условию — на странице 34 седьмого номера 1981 года

687. а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых рёбер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого одного цвета.

б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?
Н.Ненов (Болгария). Решение — в №2–1982

688. Ни одно из натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n не превосходит его номера; сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ чётна. Докажите, что сумма нескольких из данных чисел равна сумме остальных данных чисел.
С.Ненашев. Решение — в №2–1982. Поправка к условию — на странице 34 седьмого номера 1981 года

689*. Из одинаковых равнобедренных трапеций с основаниями 3 см и высотой 1 см нельзя составить прямоугольник. Докажите это.
С.Рукшин и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1982

690*. а) Внутри выпуклого многоугольника с площадью S_1 и периметром P_1 расположен выпуклый многоугольник с площадью S_2 и периметром P_2. Докажите неравенство $2S_1P_2 > S_2P_1$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.
А.В.Келарев. Решение — в №2–1982

691. а) Найдите хотя бы одно такое k, что некоторое натуральное число можно представить как в виде произведения k последовательных чисел, бо́льших 1, так и в виде произведения $k+2$ таких чисел.

б) Никакое произведения двух последовательных натуральных чисел не представимо в виде произведения четырёх последовательных натуральных чисел. Докажите это.
В.Федотов и И.Клумова. Всесоюзная олимпиада, 1981 год. Решение — в №3–1982

692. Точки C_1, A_1 и B_1 так взяты на сторонах, соответственно, AB, BC и CA треугольника ABC, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : BA_1 = 1 : 3$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами а) $4P_1 < 3P$; б) $2P_1 > P$.

В. Турчанинов. Всесоюзная олимпиада, 1981 год. Решение — в №3–1982

693. Ежедневно каждый из 1000 жителей посёлка делится узнанными накануне новостями со всеми своими знакомыми. Любая новость рано или поздно становится известной всем жителям посёлка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно им сообщить какую-то новость, то через 10 дней её будут знать все жители посёлка.

Н. Карташов и А.П. Савин. Всесоюзная олимпиада, 9 класс, 1981 год. Решение — в №3–1982

694. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещённым на одном (любом) ребре, прибавляют по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале числа были поставлены, как на а) левом; б) среднем; в) правом рисунке?

Ю.И. Ионин. Всесоюзная олимпиада, 9 класс, 1981 год. Решение — в №3–1982

695*. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и чёрный цвета так, чтобы чёрных и белых клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета?

С.В. Конягин и Ю.В. Нестеренко. Всесоюзная олимпиада, 10 класс, 1981 год. Решение — в №3–1982

696. Можно ли таблицу 10×10 клеток заполнить различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата $k \times k$ клеток, где $2 \leqslant k \leqslant 10$, а) суммы; б) произведения k чисел на его диагоналях были одинаковы? *А. Балинский.* Решение — в №4–1982

697. Назовём *пузатостью* прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1. *С.В. Фомин.* Решение — в №4–1982

698. На сторонах a, b, c и d вписанного в окружность четырёхугольника «наружу» построены прямоугольники размерами $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$ и $d \times b$. Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами а) параллелограмма; б) прямоугольника.

О. Пенкин. Решение — в №4–1982

699. Полукруг с диаметром AB разрезан отрезком CD, перпендикулярным AB, на два криволинейных треугольника ACD и BCD, в которые вписаны окружности, касающиеся AB в точках E и F. Докажите, что а) $AD = AF$; б) DF — биссектриса угла BDC; в) величина угла EDF не зависит от выбора точки C на отрезке AB.

В.А. Сендеров. Решение — в №4–1982

700. Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на а) два; б) три класса так, чтобы ни в один из классов не попали два числа, разность которых — степень числа 10, то есть число вида 10^n, где n — целое? *А. Лейдерман.* Решение — в №4–1982

701. Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник LMN. Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны LM и LN, а величина угла между ними на 60° больше величины угла L треугольника LMN. Аналогично Марина построила свой треугольник со сторонами длинами ML и MN, величина угла между которыми на 60° больше величины угла M, а Наташа — свой, у которого величина угла между сторонами длин NL и NM на 60° больше величины угла N. Докажите, что третьи (новые) стороны трёх построенных треугольников одинаковы.

А. Каплан. Решение — в №5–1982

702. Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 3 = 5$, $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$, $S_4 = S_3 + 7 = 17$ и так далее. Докажите, что для любого натурального n между S_n и S_{n+1} есть хотя бы один точный квадрат.

И.К. Жук и Н.Б. Васильев. Решение — в №5–1982

703*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$

А.Фёдоров и А.Вайнтроб. Решение — в №5–1982

704*. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, тоже являются вершинами квадрата.

Н.Б.Васильев. Решение — в №5–1982

705. На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (то есть каждую клетку листа покрывают в точности две карточки). Передвигать карточки нельзя.

а) Пусть карточки имеет размеры 1×2 клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрыли лист в один слой.

Останется ли это верным, если карточки б) произвольных размеров; в*) размера 1×3 клетки? *Г.А.Гальперин и В.В.Произволов.* Решение — в №5–1982

706. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите равенство длин хорд, соединяющих точки пересечения касательных с окружностями. На рисунке эти хорды показаны красным цветом.)

А.П.Савин. Решение — в №6–1982

707. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, где занимаются не менее $2/3$ учеников этого класса. *А.Сидоренко.* Решение — в №6–1982

708. На сторонах выпуклого четырёхугольника площади S вне него построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырёхугольника площади S_1.

а) Докажите неравенство $S_1 \geqslant 2S$.

б) Докажите, что $S_1 = 2S$ тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырёхугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

П.Б.Гусятников. Решение — в №6–1982

709*. Пол комнаты, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом 60°. Разрешено вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположение другим, как показано на рисунке. Докажите, что

а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;

б) это можно сделать не более чем за 1000 операций;

в) из расположения плиток нижнего левого рисунка нельзя получить расположение рисунка нижнего правого менее чем за 1000 операций.

А.Смирнов и Н.Васильев. Решение — в №6–1982

710*. Существует ли такая возрастающая последовательность натуральных чисел, ни один из членов которой не равен сумме нескольких остальных, что n-й член этой последовательности для любого натурального числа n не превосходит числа а) $2\cdot 3^{n/2}$; б) $10\cdot 1{,}5^n$; в) n^{10}; г) $1000\cdot n^{7/2}$; д) $1000\cdot n^{3/2}$? *С.В.Конягин.* Решение — в №6–1982

711. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырёхугольник на две части равной площади. *В. Варваркин.* Решение — в №7–1982

712. Любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и до 7. Докажите это.
Э. Туркевич. Решение — в №7–1982

713. M — множество точек на плоскости. Точку O плоскости называем «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку так, что для оставшегося множества точка O является центром симметрии. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество? *В.В. Прасолов.* Решение — в №7–1982

714*. n друзей одновременно узнали n новостей, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество звонков необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а) $n = 64$; б) $n = 55$; в) $n = 100$. *А.В. Анджанс.* Решение — в №7–1982

715*. Прямой угол разбит на одинаковые клетки. На некоторых клетках стоят фишки, причём расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставим по фишке, а старую фишку убираем. Вначале в угловую клетку ставим одну лишь фишку. Можно ли указанными операциями освободить от фишек уголки из а) трёх; б) шести; в) десяти клеток, показанные на рисунках?
М.Л. Концевич. Статья А.Б. Ходулёва «Расселение фишек» седьмого номера 1982 года

716. Из точки P внутри данного треугольника ABC опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на прямые BC, AC и AB. Для каких точек P внутри треугольника ABC сумма отношений BC/PA_1, CA/PB_1 и AB/PC_1 принимает наименьшее значение?
Н.Б. Васильев. XXII международная олимпиада, 1981 год. Решение — в №7–1982

717. Рассмотрим всевозможные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящие из r чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно $(n+1)/(r+1)$. Например, при $n = 3$ и $r = 2$ получаем три подмножества $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, и среднее арифметическое равно $\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$. *И. Клумова. XXII международная олимпиада, 1981 год.* Решение — в №7–1982

718. Найдите наибольшее значение выражения вида $m^2 + n^2$ для таких пар $(m; n)$ натуральных чисел, что $m \leqslant 1981$, $n \leqslant 1981$ и $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$.
А. Абрамов и И. Клумова. XXII международная олимпиада, 1981 год. Решение — в №7–1982

719. а) Для каких $n \geqslant 3$ существует множество из n последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: наибольшее из этих n чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных $n - 1$ чисел?

б) При каких $n \geqslant 3$ существует единственное множество из n последовательных чисел, обладающих указанным свойством?
А. Абрамов. XXII международная олимпиада, 1981 год. Решение — в №7–1982

720. Функция f определена на множестве всех пар неотрицательных целых чисел $(x; y)$ и для любых неотрицательных целых x и y удовлетворяет равенствам

- $f(0; y) = y + 1$,
- $f(x+1; 0) = f(x; 1)$,
- $f(x+1; y+1) = f(x; f(x+1; y))$.

Вычислите $f(4; 1981)$. *А. Абрамов. XXII международная олимпиада, 1981 год.* Решение — в №7–1982

1982 год

721. Каждая сторона треугольника поделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите отношение площади этого шестиугольника к площади исходного треугольника.
Десятиклассник ФМШ при МГУ А.Золотых и А.А.Егоров. Решение — в №8–1982

722. В вершинах n-угольника расставлены в некотором порядке первые n натуральных чисел.

а) Докажите, что сумма n модулей разностей соседних чисел не меньше $2n - 2$.

б) Для какого количества расстановок эта сумма равна $2n - 2$?
А.А.Разборов. Решение — в №8–1982

723*. Существует ли такое бесконечное множество натуральных чисел, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не является степенью натурального числа выше первой (a^k, где a и k — натуральные числа, $k > 1$)?
Л.Гурвиц. Решение — в №8–1982

724. По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлению. Докажите, что как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они окажутся в вершинах выпуклого многоугольника. *В.В.Прасолов.* Решение — в №8–1982

725*. Положим $q_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{5\pi}{7}$. Найдите а) q_1 и q_2; б) q_3 и q_4. в) Докажите, что q_n — рациональное число при любом натуральном n. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №8–1982

726. Точку внутри правильного $2n$-угольника соединили с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрасили попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных для а) $n = 4$; б) $n = 3$; в) любого натурального n. *В.В.Прасолов.* Решение — в №8–1982

727. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$, где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2. *И.Жаров и А.А.Егоров.* Решение — в №8–1982

728. Пусть A, B, C — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной P, а Q — вершина, противоположная P. Докажите, что

а) расстояния от точек A, B и C до прямой PQ являются длинами сторон некоторого треугольника;

б) площадь S этого треугольника, объём V параллелепипеда и длина d его диагонали PQ связаны соотношением $V = 2dS$. *И.Ф.Шарыгин.* Решение — в №8–1982

729. Найдите натуральное число, обладающее свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №8–1982

730*. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... определена условиями $a_1 = 0$ и $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ для любого натурального n. (Например, $a_{10} = 5 - a_5 = 5 - (2 - a_2) = 3 + (1 - a_1) = 4$.)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите a_{1982}.

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число $2k$ (при каждом натуральном k)?

в) Докажите, что разность $a_n - a_{n-1}$ равна 1, если в разложение числа n на простые множители число 2 входит в нечётной степени, и 0 — в противном случае.

г) Докажите, что $a_n = n/3$ для бесконечного множества значений n.

д) Найдётся ли n такое, что разность $\|a_n - \frac{n}{3}\|$ больше 1982?

е) Частное от деления a_n на n стремится к $1/3$ при стремлении n к бесконечности. Докажите это. *В.С.Шевелёв.* *Решение — в №8–1982*

731. Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9; второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9; затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и так далее; выигрывает тот, кто первым получит произведение больше а) тысячи; б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнёр?
В.Г.Болтянский. *Решение — в №9–1982*

732. а) В треугольник ABC вписаны два разных прямоугольника так, что на основании AC лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах AB и BC — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника ABC и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник ABC прямоугольника, две вершины которого лежат на AC, тоже равен 10.

б*) В четырёхугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон AB, BC, CD и DA лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$ и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырёхугольника $ABCD$ можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данного прямоугольника и периметр которого также равен 10.
Десятиклассник ФМШ Тбилиси Малхази Беруашвили, В.Н.Дубровский и А.А.Егоров. *Решение — в №9–1982*

733. а) При каких натуральных m число $31^m - 1$ делится на 2^m?

б*) Для любых нечётного a и натурального m существует бесконечно много таких натуральных k, что $a^k - 1$ делится на 2^m. Докажите это.

в*) Для любого нечётного числа a, где $z > 1$, существует лишь конечное число таких натуральных чисел m, что $a^m - 1$ делится на 2^m. Докажите это.
В.В.Прасолов. *Решение — в №9–1982*

734. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Докажите, что длина проекции отрезка AK на прямую AB равна полусумме длин сторон AB и AC. *Р.Мазов.* *Решение — в №9–1982*

735*. а) Круг диаметром 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосами, сумма ширин которых меньше 1. Докажите это.

б) Назовём слоем толщины h часть пространства, заключённого между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Докажите, что шар диаметром 1 нельзя покрыть несколькими слоями, сумма толщин которых меньше 1. *С.Шлосман.* *Решение — в №9–1982. Статья М.В.Смурова и А.В.Спивака «Покрытия полосками» пятого номера 1998 года*

736. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите равенство $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$. *З.Анджапаридзе.* *Решение — в №9–1982*

737. Обозначим через d_k количество тех домов некоторого города, в которых живёт не меньше k жителей, а через c_m — количество жителей в m-м по величине населения доме. Докажите равенства

а) $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots;$

б) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \ldots + (2k-1)d_k + \ldots;$

в) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots = c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \ldots + (2k-1)c_k + \ldots.$

А.В.Зелевинский. *Решение — в №9–1982*

738*. Докажите следующие утверждения.

а) Количество прямых различных направлений, на которые данный n-угольник даёт одинаковые по величине проекции, не превосходит $2n$;

б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника чётно;

в) для треугольника это число больше трёх тогда и только тогда, когда треугольник остроугольный. *В.В.Прасолов. Решение — в №9–1982*

739. Для любого x, при котором левые части имеет смысл, докажите равенства

а) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=3$;

б) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}=c_n$, где n — нечётное число, c_n — константа (зависящая от n).

в*) Найдите c_n для каждого нечётного $n = 5, 7, 9, \ldots$

В.Б.Алексеев и А.А.Егоров. Решение — в №10–1982

740. Серёжа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто,— ответила соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на кастрюле, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа — и зажми её пальцем! До этого уровня и надо налить воду. «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие»,— усомнился Серёжа. «Всё равно, мой способ годится в любом случае!»— гордо ответила тетя Люда.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объёмов воды и пшена по её рецепту всегда одно и то же.

б) Чему равно это отношение? *В.Семёнова. Решение — в №10–1982*

741. а) Укажите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само число). б) Найдите все такие числа. *М.Лёвин. Решение — в №10–1982*

742. На а) окружности; б) сфере радиусом 1 расположены n точек. Докажите, что сумма квадратов расстояний между ними не превышает n^2.

743. В стране n городов.

а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или пароходом. Докажите, что, пользуясь лишь каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками).

б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или пароходом. Докажите, что можно выбрать не менее $n/2$ городов и один из трёх видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город.

в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число $n/2$ бо́льшим, вообще говоря, нельзя. *Л.Д.Курляндчик и С.Охитин. Решение — в №10–1982*

744*. В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (вершины A_1, B_1 и C_1 углов, равных по величине углам A, B и C, лежат соответственно на отрезках BC, CA и AB). Пусть A_0, B_0, C_0 — точки пересечения прямых BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и AA_1. Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$ и $B_1C_1A_0$, пересекаются в одной точке.

Д.Изаак и В.Н.Дубровский. *Решение — в №10–1982*

745. а) Ни одно из чисел d_1, d_2, d_3, ... не превосходит по абсолютной величине числа 1. Докажите, что существует такая последовательность s_1, s_2, s_3, ..., состоящая из чисел 1 и —1, что для всех натуральных n сумма чисел d_1s_1, d_2s_2, ..., d_ns_n по абсолютной величине не превосходит 1.

б) Для каждого натурального n задана тройка чисел (a_n, b_n, c_n), сумма которых $a_n + b_n + c_n$ равна нулю и ни одно из которых не превосходит по абсолютной величине числа 1. Построим новую последовательность троек (x_n, y_n, z_n), в которой $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а каждая очередная тройка (x_n, y_n, z_n) получается из предыдущей тройки $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ прибавлением к x_{n-1} одного из чисел a_n, b_n и c_n по нашему выбору, к y_{n-1} — другого, к z_{n-1} — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа x_n, y_n и z_n будут по абсолютной величине не больше 1 или хотя бы ограничены некоторой константой?

в) Ответьте на аналогичный вопрос для последовательностей четвёрок чисел.

Н.Х.Розов и Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1982*

746. Бумажный квадрат складываем пополам по некоторой прямой l, проходящей через его центр, в невыпуклый девятиугольник. Как нужно провести прямую l, чтобы:

а) площадь полученного девятиугольника была максимальной?

б*) в нём помещалась окружность наибольшего возможного радиуса?

К.Вульфсон. *Решение — в №11–1982*

747. а) Сумма n чисел равна 0, сумма их модулей равна a. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше $2a/n$.

б*) Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ выбрана точка O так, что сумма векторов равна нулевому вектору, а сумма их длин равна d. Докажите, что периметр этого n-угольника не меньше $4d/n$.

в*) Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых n)?

В.В.Прасолов. *Решение — в №11–1982. Статья В.М.Тихомирова «Об одной олимпиадной задаче, или Может ли в меньшем быть чего-нибудь меньше?» первого номера 1983 года и статья Ю.И.Ионина, А.И.Плоткина «Среднее значение функции» седьмого номера 1977 года*

748. а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (*Внутренней областью параболы* мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола.)

б*) В пространстве расположено несколько не пересекающих друг друга конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли всё пространство. (*Конусом* мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)

А.Кузьминых. *Решение — в №11–1982 и в заметке «Из писем читателей» третьего номера 1984 года*

749* а) Если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2}$. Докажите это неравенство и выясните, при каких условиях оно превращается в равенство.

б) Если $n\geqslant 4$ и x_1, x_2, $\ldots$, x_n — положительные числа, то $\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant 2$, причём равенство возможно только при $n=4$. Докажите это.

в) Докажите, что при $n>4$ неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком n число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

А.Прокопьев и А.А.Егоров. Решение — в №11–1982. Комментарий — в задаче М915

750. Докажите, что как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в N цветов, найдётся

а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета, а стороны идут параллельно линиям сетки — по горизонтальным и вертикальным прямым;

б) l горизонтальных и m вертикальных прямых, которые пересекаются в центрах lm клеток одного цвета (l и m — любые натуральные числа);

в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого — центры клеток одного цвета, при $N=2$;

г*) то же для $N=3$.

С.Н.Беспамятных. Решение — в №12–1982. Статья «Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях» шестого номера 1983 года

751* На окружности намечены $3k$ точек, разделяющих её на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, ещё k дуг — длину 2, а остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек есть две диаметрально противоположные.

В.В.Произволов и В.Н.Дубровский. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

752. Квадратная таблица размером $n\times n$ заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся друг от друга не больше, чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице не менее чем а) $[n/2]$; б) n раз.

А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

753. Числа a, b и c лежат на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и удовлетворяют равенствам: $\cos a=a$, $\sin\cos b=b$ и $\cos\sin c=c$. Расположите числа в порядке возрастания.

С.Гессен. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

754* а) Существуют ли такие многочлены P, Q и R от переменных x, y и z, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3\cdot P(x,y,z)+(y-z-1)^3\cdot Q(x,y,z)+(z-2x+1)^3\cdot R(x,y,z)=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3\cdot P(x,y,z)+(y-z-1)^3\cdot Q(x,y,z)+(z-x+1)^3\cdot R(x,y,z)=1.$$

П.Б.Гусятников и Ю.В.Нестеренко. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

755. Внутри тетраэдра выбрана некоторая точка. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из неё под углом, косинус которого не больше числа $-1/3$.

С.Б.Гашков и В.Н.Дубровский. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

756.* В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединён авиалиниями ровно с 10 городами. Из любого города можно (быть может, с пересадками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно так закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, что возможность попасть из любого города в любой сохранится.

А.А.Разборов. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

757. Из последовательности 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, … легко выделить трёхчленную арифметическую прогрессию: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию длиной а) 4; б) 5; в) k, где k — любое натуральное число?

Г.А.Гальперин. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

758.* Какое наименьшее количество чисел можно вычеркнуть из последовательности 1, 2, 3, …, 1982, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?

Л.Д.Курляндчик. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №12–1982

759. Внутри выпуклого четырёхугольника, сумма всех шести расстояний между вершинами которого (то есть сумма длин всех сторон и диагоналей) равна S_1, расположен другой, для которого эта сумма равна S_2.

а) Может ли величина S_2 быть больше S_1?

б) Докажите неравенство $S_2 < \frac{4}{3}S_1$.

в) Если внутри тетраэдра с суммой длин рёбер S_1 расположен тетраэдр с суммой длин рёбер S_2, то $S_2 < \frac{4}{3}S_1$. Докажите это.

П.Б.Гусятников. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №1–1983. Статья В.М.Тихомирова «Об одной олимпиадной задаче, или Может ли в меньшем быть чего-нибудь меньше?» и статья Ю.И.Ионина, А.И.Плоткина «Среднее значение функции» седьмого номера 1977 года

760. С замкнутой ломаной $A_1A_2\ldots A_m$, где m нечётно, проделываем такую операцию: середины её звеньев соединяем m отрезками через одну (середину A_1A_2 — с серединой A_3A_4, A_2A_3 — A_4A_5, …, $A_{m-1}A_m$ — A_1A_2, A_mA_1 — с серединой A_2A_3). С полученной ломаной вновь проделываем эту же операцию. Так же действуем и далее. Докажите, что из любой m-звенной ломаной при а) $m = 5$ — через 2 шага; б) $m = 7$ — через 3 шага; в*) любом нечётном m через некоторое (зависящее от m) число шагов получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной.

А.В.Келарев. Всесоюзная олимпиада 1982 года. Решение — в №1–1983

761. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

762. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенства

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

С.В.Дворянинов и Э.А.Ясиновый. Решение — в статье «Как получаются симметричные неравенства?» седьмого номера 1985 года и в статье Л.Пинтера и Й.Хегедыша «Упорядоченные наборы чисел и неравенства» двенадцатого номера 1985 года

763.* Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB. Найдите отношение QA/QD, если известно отношение $AC/BD = k$.

В.Н.Дубровский. Решение — в №1–1983

764. Уравнение а) $x^2 + y^3 = z^5$; б) $x^2 + y^3 + z^5 = t^7$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Докажите это. *О.В.Мазуров. Решение — в №1–1983*

765. Пусть B — конечное множество точек на плоскости, не лежащее на одной прямой и состоящее не менее чем из 3 точек.

а) Существуют три такие точки множества B, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества B. Докажите это.

б) Назовём триангуляцией множества B семейство треугольников с множеством вершин B, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек, в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества B можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого B существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества B. Укажите способ построения такой триангуляции.

в) Если никакие четыре точки множества B не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна. Докажите это.

М.Л.Концевич, Ф.В.Вайнштейн и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1983 и в заметке «Из писем читателей» третьего номера 1984 года

766. Сумма квадратов всяких любых последовательных целых чисел не равна кубу никакого натурального число n. Докажите это. *Ю.И.Ионин. Решение — в №2–1983*

767. а) Прямая делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит числа $1 + \sqrt{2}$.

б) Каждая из трёх прямых делит площадь данной фигуры пополам. Докажите, что площадь части фигуры, заключённой в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит $1/4$ всей площади фигуры. *В.В.Прасолов. Решение — в №2–1983*

768*. Сумма n чисел, ни одно из которых не превосходит по модулю 1, равна s. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы сумма выбранных чисел отличалась от $s/3$ не более чем на $1/3$. *В.П.Гринберг. Решение — в №2–1983*

769*. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке L, их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках X, Y и Z соответственно. Пусть R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите равенства а) $LX \cdot LZ = R \cdot LB$; б) $LA \cdot LC = r \cdot LY$; в) $S_{ABC}/S_{XYZ} = 2r/R$. *Р.А.Мазов. Решение — в №2–1983. Статья И.Ф.Шарыгина «Вокруг биссектрисы» восьмого номера 1983 года*

770*. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC. Докажите, что если величины углов PAB, PBS, PCA равны, то пирамида $PABC$ правильная. *В.А.Сендеров. Задача была подписана псевдонимом, поскольку автор был арестован в 1982 году и находился сначала под следствием в Лефортово, а затем в политзоне Пермской области и в тюрьме города Чистополь (Татария). Решение — в №3–1983*

771. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Вписанная в треугольник ABK и описанная около треугольника ABC окружности концентричны. Найдите величины углов треугольника ABC. *П.Б.Гусятников и С.В.Резниченко. Решение — в №2–1983*

772. В мастерской пять разных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трёх из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке. *П.Б.Гусятников и С.В.Резниченко. Решение — в №2–1983*

773. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. Докажите, что если сумма векторов $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$ и $\overrightarrow{CZ}$ равна нулю, то треугольник ABC равносторонний.

П.Б.Гусятников и С.В.Резниченко. Решение — в №2–1983

774. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[0;1]$, такова, что для любых чисел x и y отрезка $[0;1]$ значение функции в точке, являющейся полусуммой чисел x и y, не превосходит суммы значений функции f в точках x и y. Докажите, что

а) значения функции f во всех точках отрезка $[0;1]$ неотрицательны;

б) функция f равна нулю в бесконечном множестве точек отрезка $[0;1]$;

в) если существует такое число A, что значения функции f во всех точках отрезка $[0;\frac{1}{2}]$ не превосходят числа A, то и значения функции f во всех точках отрезка $[0;1]$ не превосходят числа A;

г*) если функция f непрерывна хотя бы в одной точке отрезка $[0;1]$, то она тождественно равна 0;

д*) существует функция f, удовлетворяющие условиям задачи и не во всех точках равная нулю.

П.Б.Гусятников. Решение — в №2–1983

775. Для каких натуральных $n > 2$ существуют такие различные натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, ни одно из которых не превосходит числа $n+1$, что все n чисел $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, $\ldots$, $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?

А.В.Анджанс. Решение — в №3–1983

776. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты такие точки M и N соответственно, что $AM:AC=CN:CE=\lambda$. Найдите λ, если точки B, M и N лежат на одной прямой.

А.П.Савин. XXIII международная олимпиада. Решение — в №3–1983

777. Рассмотрим уравнение $x^3-xy^2+y^3=n$. Докажите, что

а) если натуральное n таково, что это уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по крайней мере три целочисленных решения;

б) при $n=2891$ это уравнение не имеет целочисленных решений.

XXIII международная олимпиада, 1982 год. Решение — в №3–1983

778*. Дан неравнобедренный треугольник $A_1A_2A_3$. Пусть a_k — его сторона, лежащая против вершины A_k ($k=1$, 2, 3), M_k — середина стороны T_k — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и S_k — точка, симметричная T_k относительно биссектрисы угла A_k треугольника. Докажите, что прямые M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 имеют общую точку.

А.П.Савин. XXIII международная олимпиада, 1982 год. Решение — в №3–1983

779*. а) Для любой невозрастающей последовательности $1=x_0$, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ положительных чисел существует такое натуральное n, что $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3{,}999$. Докажите это.

б) Придумайте такую невозрастающую последовательность $1=x_0$, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ положительных чисел, что $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$ для любого натурального n.

А.Гришков и А.П.Савин. XXIII международная олимпиада. Решение — в №3–1983

780*. Дан квадрат K со стороной 100. Пусть L такая — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая в K, что для любой точки P границы квадрата K найдётся точка ломаной L, расстояние которой от P не больше $1/2$. Докажите, что на ломаной найдутся такие две точки X и Y, что расстояние между которыми не превышает 1, а длина части ломаной, заключённой между ними, не меньше 198.

А.П.Савин. XXIII международная олимпиада, 1982 год. Решение — в №4–1983

1983 год

781. Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $AD = BE$.
Л.В.Ким и В.Н.Дубровский. Решение — в №4–1981

782. Если сумма двух натуральных чисел равна 30 030, то их произведение не делится на 30 030. Докажите это.
С.В.Фомин и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1983

783. а) При каком наибольшем n существует такое число x, что его первая степень расположена на интервале $(1;2)$, вторая — на интервале $(2;3)$, третья — на интервале $(3;4)$, ..., n-я — на интервале $(n;n+1)$?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии — арифметическая a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1} и геометрическая b_1, b_2, b_3, ..., b_n,— что $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \ldots < a_n < b_n < a_{n+1}$?
А.П.Савин. Решение — в №4–1983

784. Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причём ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α. (Для нашей Земли $\alpha = 66,5^\circ$). Угловая скорость вращения планеты по орбите много меньше угловой скорости вращения планеты вокруг её оси. Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. Нарисуйте эскиз графика функции $T(\varphi)$.
А.П.Савин. Решение — в №4–1983

785. а) Про возрастающую последовательность положительных чисел a_1, a_2, a_3, ... известно, что для любого натурального числа $k > 1$ существует такое число b_k, что $a_{kn} \leqslant b_k a_n$ при всех n. Докажите, что существуют положительные числа c и α, для которых $a_n \leqslant cn^\alpha$ при всех $n \geqslant 1$. Останется ли верным это утверждение, если в условии

б) слово «любого» заменить на «некоторого»;

в) не требовать, чтобы последовательность a_1, a_2, a_3, ... была возрастающей?
М.У.Гафуров и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1983

786. Для любого натурального k и для любого натурального $n > 1$ число n^k представимо в виде суммы k последовательных нечётных чисел. (Например, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, $7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$, $3^4 = 25 + 27 + 29$.) Докажите это.
А.Н.Козаченко. Решение — в №5–1983

787. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.
Б.С.Пицкель и В.Н.Дубровский. Решение — в №5–1983

788. а) На графике функции $y = x^2$ отмечены точки $A(a;a^2)$ и $B(b;b^2)$. Найдите между ними точку, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая.

б) На графике дифференцируемой функции $y = f(x)$ отмечены точки A и B. Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M — точка графика, расположенная между A и B, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB.
Е.Д.Москаленский и Ю.В.Чиняев. Решение — в №5–1983

789. а) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, разбили на пары и точки каждой пары соединены друг с другом. Обязательно ли среди полученных пяти хорд найдутся хорды одинаковой длины?

б*) 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг, разбили на пары и точки каждой пары соединены друг с другом. Докажите, что среди полученных пятидесяти хорд есть хорды одинаковой длины.

В.В.Произволов и И.Топов. *Решение — в №5–1983. Заметка «Из писем читателей» третьего номера 1984 года*

790. а) Функция f такова, что если $|x-y|=1$, то $|f(x)-f(y)|=1$. Верно ли, что для любых x и y выполнено равенство $|f(x)-f(y)|=|x-y|$?

Про отображение F плоскости в себя известно, что любые точки X и Y, находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в точки $F(X)$ и $F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1. Докажите, что отображение F сохраняет расстояния, то есть для любых точек X и Y верно равенство $XY=F(X)F(Y)$, доказав следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема*): для любых точек X и Y

б) $F(X)F(Y)\leqslant XY+1$;

в) если $XY=\sqrt{3}$, то $F(X)F(Y)=\sqrt{3}$;

г*) $XY\leqslant F(X)F(Y)$;

д*) $XY\geqslant F(X)F(Y)$.

А.Тышка и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5–1983*

791. Пете подарили микрокалькулятор, на котором он может выполнять следующие операции: по любым данным числам x и y вычислить сумму $x+y$, разность $x-y$, сумму $x+1$, а также обратную величину $1/x$ (если $x\neq 0$). Петя умеет с помощью своего микрокалькулятора

а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;

б*) перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций.
А Вы так сможете?

С.Б.Гашков. *Решение — в №6–1983*

792. Решите в натуральных числах уравнения а) $3^x+1=2^y$; б) $3^x-1=2^y$.

в*) Найдите все натуральные n, при которых оба числа $1/n$ и $1/(n+1)$ выражаются конечными десятичными дробями.

г*) Ни при каком простом $p>3$ и ни при каком натуральном $m>1$ ни одно из чисел p^m+1 и p^m-1 не является степенью двойки. Докажите это.

С.Н.Бычков, В.В.Прасолов и Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №6–1983*

793*. Из вершины P тетраэдра $PABC$ проведём отрезки PA', PB', PC', перпендикулярные соответственно граням PBC, PCA, PAB, а по длине равные площадям этих граней (направления этих векторов выбираем так, что точки A и A', B и B', C и C' лежат по разные стороны от плоскостей соответствующих граней PBC, PCA, PAB. Докажите, что

а) Повторив это же построение для тетраэдра $PA'B'C'$ (и его вершины P), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$, где V равно объёму тетраэдра $PABC$.

б) Сумма векторов $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{PB'}$ и $\overrightarrow{PC'}$ перпендикулярна плоскости ABC.

в) Из точки O, взятой внутри тетраэдра $ABCD$, опустим перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки O отложим отрезки, длины

---

*) Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.

которых равны площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков примем за вершины нового тетраэдра $A'B'C'D'$. (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки O.) Докажите, что, повторив это построение для тетраэдра $A'B'C'D'$, мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом $3V$, где V — объём исходного тетраэдра $ABCD$. (Если $3V = 1$, то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

В.Н.Дубровский. Статья «Что скрывается за за превращениями тетраэдра?» седьмого номера 1983 года

794. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проведём прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности. *Девятиклассница Алла Ивченко (Могилёв-Подольский). Решение — в №6–1983*

795. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех делителей натурального числа n. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что а) $\sigma(n) > 2n$; б) $\sigma(n) > 3n$. Докажите для любого натурального числа n неравенства в*) $\sigma(n) < n(\log_2 n + 1)$; г) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$.

Вот таблица нескольких первых значений функции σ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	18	39	20	42

В.Ф.Лев. Решение — в №6–1983

796. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите величину угла APB. *Л.Д.Курляндчик. Решение — в №7–1983*

797*. Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, то есть что для любых цифр a_1, a_2, ..., a_n и любой цифры $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ существует целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1 a_2 \ldots a_n b$? *Д.Б.Фукс. Решение — в №7–1983*

798*. На окружности отметили $4k$ точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем $2k$ красных точек произвольным образом разбили на пары и соединили точки каждой пары красным отрезком, так что всего провели k красных отрезков. Аналогично $2k$ синих точек разбили на пары и соединили синими отрезками, проведя всего k синих отрезков. Никакие три отрезка не пересеклись в одной точке. Докажите, что количество точек пересечения красных отрезков с синими не меньше k. *С.В.Фомин. Решение — в №7–1983*

799. а) Найдите одно решение уравнения $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$ и докажите, что у него нет других решений.

б*) Найдите два разных решения уравнения $3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$ и докажите, что у него нет других решений. *С.С.Валландер. Статья «Постоянная становится переменной» седьмого номера 1983 года*

800*. а) На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решётки. Среди них выделен один «начальный» узел O. Для каждого из остальных узлов P проведена прямая, относительно которой узлы O и P симметричны,— серединный перпендикуляр к отрезку OP. Проведённые прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число — ранг — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает ранг 1, части, граничащие с ней по стороне,— ранг 2, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных) — ранг 3 и так далее. Докажите, что сумма площадей всех частей ранга r одна и та же при всех натуральных r.

б) Верно ли аналогичное утверждение для произвольной решётки из параллелограммов (например, для решётки из ромбов с углом в 60°)? Для решётки из правильных шестиугольников?

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для кубической решётки в пространстве. *А.Б.Гончаров. Статья «Решётки и зоны Бриллюэна» шестого номера 1984 года или первого номера 1995 года*

801. Для любого натурального числа $n > 1$ докажите равенство $[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n]$. *В.В.Кисиль. Решение — в №8–1983*

802. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне него прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B. Найдите величины углов треугольника PQK, где K — середина стороны AC. *Л.П.Купцов и В.Н.Дубровский. Решение — в №8–1983*

803. Сумма двух рациональных чисел x и y — натуральное число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ — тоже натуральное число. Какими могут быть x и y? *Р.А.Мазов и А.П.Савин. Решение — в №8–1983*

804. Точка O — середина оси прямого кругового цилиндра, A и B — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания этого цилиндра, C — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB. Докажите, что сумма величин двугранных углов трёхгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 360°. *И.К.Жук. Решение — в №8–1983. Статья В.Э.Матизена «Равногранные и каркасные тетраэдры» седьмого номера 1983 года*

805*. а) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки X, Y и Z соответственно так, что отрезки AX, BY и CZ пересекаются в одной точке. Докажите, что площадь треугольника XYZ не превосходит четверти площади треугольника ABC.

б) На гранях BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$ выбраны точки X, Y, Z и T соответственно так, что отрезки AX, BY, CZ и DT пересекаются в одной точке. Докажите, что объём тетраэдра не более чем в 27 раз превосходит объём тетраэдра $ABCD$. *Р.П.Ушаков. Решение — в №8–1983*

806. а) Если $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} = 0$, то многочлен $f(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0; 1)$. Докажите это.

б) Если для некоторого положительного p верно равенство $\frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \frac{a_3}{p+3} + \ldots + \frac{a_n}{p+n} = 0$, то многочлен f имеет хотя бы один корень на интервале $(0; 1)$. Докажите это. *Десятиклассники А.Гохберг и М.Овецкий (Донецк). Решение — в №9–1983*

807. а) Из точки M, расположенной внутри равностороннего треугольника ABC, опущены перпендикуляры MX, MY и MZ на его стороны. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}$ равна $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{MO}$, где O — центр треугольника ABC.

б) Из точки M опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, …, MK_n на стороны правильного n-угольника (или их продолжения). Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \ldots + \overrightarrow{MK_n}$ равна $\frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{MO}$, где O — центр треугольника многоугольника.

в) Из точки M, расположенной внутри правильного тетраэдра $ABCD$, опущены перпендикуляры OK_1, OK_2, OK_3 и OK_4 на его грани. Докажите равенство $\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} + \overrightarrow{MK_4} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{MO}$, где O — центр тетраэдра. *В.В.Прасолов. Решение — в №9–1983*

808*. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй — k (неокрашенных) клеток в синий цвет, затем снова первый одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток — в синий и так далее. Первый стремится к тому, чтобы четыре какие-нибудь красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными линиям сетки). Сможет ли второй ему помешать, если k равно а) 1; б*) 2; в*) некоторому натуральному числу, не равному 1?

Д.Г.Азов. Решение — в №9–1983. Статья С.Н.Беспамятных «Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях» шестого номера 1983 года

809. Найдите сумму $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$. *В.В.Произволов. Решение — в №9–1983*

810*. В любой выпуклый многоугольник можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше $1/4$ площади этого многоугольника. Докажите это.

Ф.В.Вайнштейн. Решение — в №9–1983 и на странице 43 первого номера 1986 года

811. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведённые к сторонам a, b и c соответственно), r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите неравенство $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leqslant 1+\frac{R}{r}$.

Д.М.Милошевич. Решение — в №10–1983

812. Для любого натурального n докажите неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

С.И.Майзус. Решение — в №10–1983

813. Даны отрезки OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади треугольника ABC. *В.В.Прасолов. Решение — в №10–1983*

814*. Отметим в натуральном ряду числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например, $72=6^2+6^2$, $73=8^2+3^2$, $74=7^2+5^2$.

а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много б) пар; в) троек последовательных чисел. *Л.Д.Курляндчик. Решение — в №10–1983*

815*. На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами от 1 до $4k$.

а) Докажите, что эти точки можно соединить $2k$ не пересекающими друг друга отрезками так, что ни одна из разностей чисел в концах отрезков не превзойдёт $3k-1$.

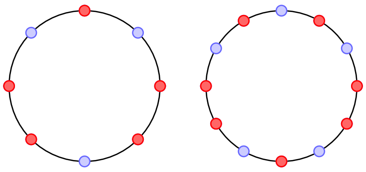
б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k-1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим. *А.А.Разборов. Решение — в №10–1983*

816. Натуральные числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что а) суммы цифр чисел $2a$ и $2b$ равны; б) если a и b чётные, то суммы цифр чисел $a/2$ и $b/2$ равны; в) суммы цифр чисел $5a$ и $5b$ равны.

А.Д.Лисицкий. Решение — в №11–1983

817. Точка K лежит настороне BC треугольника ABC. Докажите, что равенство $AK^2 = AB \cdot AC - KB \cdot KC$ выполнено тогда и только тогда, когда $AB = AC$ или $\angle BAK = \angle CAK$.
А.Л.Тоом. Решение — в №11–1983

818. Раскраску k вершин правильного n-угольника в красный цвет называем *равномерной*, если при любом m количества красных вершин в любых двух наборах из m последовательных вершин n-угольника совпадают или отличаются на 1 (на рисунках приведены примеры равномерных раскрасок для $n = 8$, $k = 5$ и для $n = 12$, $k = 7$).



а) Постройте равномерные множества для $n = 12$ и $k = 5$, а также для $n = 17$ и $k = 7$.

Докажите, что равномерная раскраска существует и единственна с точностью до поворотов n-угольника, б) если n делится на k; в*) для любых n и k, где $k \leqslant n$.
М.Л.Концевич. Статья «Равномерные расположения» седьмого номера 1985 года

819. В Швамбрании n городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все пересечения организованы на разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) при этом найдётся город, из которого можно добраться до всех других, и найдётся город, из которого нельзя выехать;

в) существует $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ способов осуществить намерение злого волшебника.
Л.М.Коганов и В.Н.Дубровский. Решение — в №11–1983

820*. Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

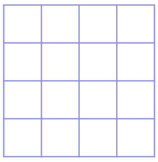
б) Правильный $4k$-угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы k прямоугольников.

в) Найдите сумму площадей прямоугольников из пункта б), если длина стороны $4k$-угольника равна 1.
В.В.Произволов. Решение — в №11–1983

821. Решите уравнение $x^3 + x^2 + x = \frac{1}{3}$.
Ю.И.Ионин. Решение — в №12–1983

822. Карточки четырёх цветов — n зелёных, n красных, n синих и n жёлтых — сложены стопкой так, что через четыре карточки цвет повторяется (например, 1-я, 5-я, 9-я, 13-я, … карточки зелёные, 2-я, 6-я, 7-я, 17-я, … — красные и так далее). Несколько карточек сверху сняли, не перекладывая перевернули и произвольным образом вставили между оставшимися. После этого стопу разделили на n маленьких стопок по четыре карточки. Докажите, что в каждой из этих четвёрок встретятся карточки всех четырёх цветов.
С.Б.Шлосман. Решение — в №12–1983

823. С фотографии срисован контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причём более длинная стена на фотографии слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева). а) Дорисуйте контур; б) нарисуйте точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой укажите контур дома и точку съёмки; в) определите высоту дома и высоту, с которой производилась съёмка.
Д.Б.Фукс. Статья «Перспектива» второго номера 2009 года



824. В сетке, изображённой на рисунке, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения а) 8 ломаных длины 5; б) 5 ломаных длины 8?
Н.И.Авилов. Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №12–1983*

825. Множество M состоит из k лежащих на одной прямой отрезков, никакие два из которых не пересекаются. Докажите, что если любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы его концы принадлежали множеству M, то сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$. *Е.И.Хухро. Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №12–1983*

826. На доске написали три числа. Затем одно из них стёрли и написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967 и 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3? *А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №1–1984*

827. Четыре синих треугольника на рисунке равновелики (то есть их площади равны).

а) Докажите, что три красных четырёхугольника также равновелики.

б) Найдите отношение площади красного четырёхугольника к площади синего треугольника. *Б.И.Чиник и В.Н.Чиник. Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №1–1984*

828*. Можно ли в клетках бесконечного листа бумаги расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в любом прямоугольнике размером 4×6, стороны которого идут по сторонам сетки, равнялась а) 10; б) 1?
Н.Ю.Нецветаев и А.Л.Смирнов. Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №1–1984*

829. Среди любых $2m+1$ различных целых чисел, по модулю не превосходящих $2m-1$, есть три числа, сумма которых равна 0. Докажите это.
Н.В.Карташов. Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №1–1984*

830*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$, в котором p_2 — это меньший, а q_2 — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и так далее.

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую возможную длину такой последовательности квадратных трёхчленов. *М.В.Сапир. Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №1–1984*

831. Точки P и Q — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если $MN\perp PQ$, то $BC=AD$.
В.В.Прасолов и В.Н.Дубровский. *Решение — в №2–1984. Статья В.Э.Матизена «Равногранные и каркасные тетраэдры» седьмого номера 1983 года*

832. а) Для любого натурального $n>6$ квадрат можно разрезать на n квадратов. Докажите это.

б) Для любого натурального $n>100$ куб можно разрезать на n кубов. Докажите это. *В.А.Ли.* *Решение — в №2–1984*

833*. Последовательность задана формулами $x_1=2$ и $x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}$ для любого натурального n. Докажите, что а) $x_n\neq0$ ни для какого натурального n; б) последовательность x_1, x_2, x_3, ... непериодическая. *В.Э.Матизен.* *Решение — в №2–1984*

834. Оросительная установка обслуживает круг радиусом 100 метров. Такими установками надо полностью оросить квадратное поле со стороной 1 километр.

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля, как показано на рисунке. В каких пределах может меняться сторона a квадратной сетки?

б) Можно ли оросить поле с помощью 46 таких установок?

Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1984

835*. На круговой шахматный турнир приехало n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B. Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдётся хотя бы одна пара шахматистов, которые ранее встречались друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных шахматистов уже встречался с каждым из выбранных b шахматистов, причём $a+b>n$. *Л.Д.Менихес. Решение — в №2–1984*

836. Пусть A — одна из точек пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2; P_1P_2 и Q_1Q_2 — общие касательные, M_1 и M_2 — середины хорд P_1Q_1 и P_2Q_2 этих окружностей. Докажите равенство величин углов O_1AO_2 и M_1AM_2.

И.Ф.Шарыгин. XXIV международная олимпиада, 1983 год. Решение — в №3–1984

837*. Если a, b, c — натуральные числа, каждые два из которых взаимно просты, то наибольшее из целых чисел, не представимых в виде $xbc+yca+zab$, где x, y, z — неотрицательные целые числа, равно $2abc-ab-bc-ca$. Докажите это.

А.М.Абрамов и Н.Б.Васильев. XXIV международная олимпиада, 1983 год. Решение — в №3–1984

838. Множество точек, лежащих на сторонах равностороннего треугольника, разбито на два подмножества. Обязательно ли хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся три точки — вершины прямоугольного треугольника?

Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский. XXIV международная олимпиада, 1983 год. Решение — в №3–1984

839*. Можно ли так выбрать 1983 натуральных числа, не превосходящих 100 000, чтобы среди выбранных чисел не было ни одной тройки чисел, составляющих арифметическую прогрессию (то есть ни одной тройки a, b, c, в которой $a+c=2b$)?

А.М.Абрамов. XXIV международная олимпиада, 1983 год. Решение — в №3–1984 и на странице 43 первого номера 1986 года

840*. а) Если a, b, c — длины сторон треугольника, то $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$. Докажите это неравенство и выясните, в каких случаях оно обращается в равенство.

б) Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $a^3c+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab$. *А.М.Абрамов и Э.А.Ясиновый. XXIV международная олимпиада, 1983 год. Решение — в №3–1984 и в статье М.Горелова «О пользе графиков» третьего номера 2010 года*

1984 год

841. Произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной окружности, равна площади этого треугольника. Докажите это. *В.Н.Дубровский и руководитель кружка Тбилисского дворца пионеров Л.А.Штейнгарц.* *Решение — в №4–1984 и на странице 43 первого номера 1986 года*

842. Докажите следующие утверждения.

а) Если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

б) Если величины α, β, γ углов треугольника удовлетворяют равенству

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\sqrt{3},$$

то хотя бы одна из них равна 60°. *Л.Д.Курляндчик.* *Решение — в №4–1984*

843. К плоскости треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA', BB' и CC', длины которых равны длинам соответствующих высот треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения плоскостей ABC', BCA' и CAB' на плоскость ABC, попадает в центр вписанной в треугольник ABC окружности, а его длина равна её радиусу. *А.А.Ягубьянц и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №4–1984*

844. Любое натуральное число a единственным образом представимо в виде

$$a=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_n\cdot n!, \tag{$*$}$$

где a_1, a_2, ..., a_n — неотрицательные целые числа, причём $a_1\leqslant 1$, $a_2\leqslant 2$, ..., $a_n\leqslant n$ и $a_n\neq 0$. Докажите это.

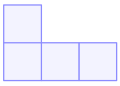
б*) Любое рациональное число r, где $0<r<1$, единственным образом представимо в виде

$$r=\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!}, \tag{$**$}$$

где b_1, b_2, ..., b_n — неотрицательные целые числа, причём $b_1\leqslant 1$, $b_2\leqslant 2$, ..., $b_n\leqslant n$ и $b_n\neq 0$. Докажите это.

в) Представьте в виде (*) число $a=1984$ и в виде (**) — число $r=19/84$. *В.Е.Колосов.* *Решение — в №4–1984*

845*. Для каких n из n уголков, состоящих из четырёх клеток 1×1, и нескольких прямоугольников 1×4 можно составить центрально-симметричную фигуру? *В.Г.Белов.* *Решение — в №4–1984*



846. Среднее арифметическое длин сторон любого выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей. Докажите это. *В.Ф.Лев.* *Исправление формулировки — в четвёртом номере 1984 года.* *Решение — в №7–1984*

847. Дан квадрат размером $n\times n$ клеток. Двое игроков обводят по очереди по одной стороне одной клетки (дважды обводить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если а) побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию; б) проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию? *И.В.Ветров и А.Г.Коган.* *Решение — в №5–1984*

848. а) Постройте график функции $f_0(x) = \Big||x-1|-2|x|-3\Big|$.

б) На рисунке изображены графики трёх кусочно-линейных функций f_1, f_2 и f_3. Запишите формулы для них в виде

$$y = kx + b + c_1|x-a_1| + c_2|x-a_2| + \ldots + c_m|x-a_m|,$$

где m — количество точек излома, a_1, a_2, ..., a_m — абсциссы точек излома, k, b, c_1, c_2, ..., c_m — некоторые числа.

в) Запишите в таком же виде функцию f_0 из пункта а).

г*) Некоторая функция является линейной комбинацией линейных функций, «абсолютных величин» («модуля») и операций сложения, причём знак сложения модуля использован в её записи n раз (в формуле пункта а) $n = 4$). Какое наибольшее число изломов может иметь её график? *П.Г.Сатьянов.* Решение — в №5–1984

849. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней никаких нескольких из этих чисел не равна сумме седьмых степеней остальных чисел. *Г.А.Гальперин.* Решение — в №5–1984

850*. Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с отрезком, соединяющим основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC. Докажите, что длина меньшего основания образовавшейся трапеции равна полусумме длин её боковых сторон. *В.Н.Дубровский.* Решение — в №5–1984

851. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ вдвое больше длины стороны квадрата. Докажите, что величина угла PCQ равна 45°. *А.Б.Ходулёв.* Решение — в №6–1984

852. Если a, b, c — длины сторон треугольника, то величина $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}$ меньше а) 1; б*) 1/8. *А.В.Ермилов.* Решение — в №6–1984

853. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.
Й.Табов (Болгария). Решение — в №6–1984 и в статье «Об одном способе задания окружности» седьмого номера 1986 года

854. На переговорном пункте установлены автоматы для размена «серебряных» монет (то есть монет достоинством 10, 15 или 20 копеек), действующие следующим образом:

20 копеек → 15 копеек, 2 копейки, 2 копейки и 1 копейка;
15 копеек → 10 копеек, 2 копейки, 2 копейки и 1 копейка;
10 копеек → 3 копейки, 3 копейки, 2 копейки и 2 копейки.

У Пети был 1 рубль 25 копеек серебряными монетами, и он все их разменял в автоматах на медные (достоинством 1, 2, 3 или 5 копеек). Вася посчитал, сколько каких монет стало у Пети, и сказал: «Я знаю, какие у тебя были серебряные монеты!» Узнайте это и Вы. *Б.И.Бегун.* Решение — в №6–1984

855*. Можно ли жёсткий правильный тетраэдр с ребром 1 протащить сквозь обруч диаметра а) 1; б) 0,95; в) 0,9; г) 0,85? *В.В.Произволов.* Решение — в №6–1984

856. а) Постройте четырёхугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

б) При каких условиях задача имеет решение? *И.З.Титович.* Решение — в №7–1984

857. Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (то есть пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или неотмеченных?

С.Стадниченко и В.Н.Дубровский. Решение — в №7–1984

858. Для величин α, β и γ углов некоторого треугольника выполнено равенство $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma$.

а) Найдите α, β и γ, если треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в*) Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

П.Б.Гусятников. Решение — в №7–1984

859. Найдите наименьшее такое положительное число a, что для любого квадратичного трёхчлена f, удовлетворяющего для любого числа $x \in [0;1]$ неравенству $|f(x)| \leqslant 1$, выполнено неравенство $|f'(1)| \leqslant a$. *В.П.Пикулин.* Решение — в №7–1984

860*. а) Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC, а I и r — центр и радиус его вписанной окружности, K — центр тяжести треугольника, вершины которого — точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами. Докажите, что точка K лежит на отрезке OI, причём $OI : IK = 3R : r$.

б) Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC, а $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$ и $\vec{n}_c$ — векторы единичной длины, перпендикулярные соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону. Докажите равенство $a^3\vec{n}_a + b^3\vec{n}_b + c^3\vec{n}_c = 12S \cdot \overrightarrow{MO}$, где S — площадь треугольника ABC, M — точка пересечения медиан, O — центр вписанной окружности. *Чан Куанг и Н.Б.Васильев.* Решение — в №7–1984

861. Из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$. Докажите это. *С.Ю.Оревков.* Решение — в №8–1984

862. а) Внутри данного равностороннего треугольника укажите множество всех таких точек M, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех таких точек M, что расстояния от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырёхугольника. *Э.А.Ясиновый.* Решение — в №8–1984

863. На каждой клетке доски $n \times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие одна другой ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если n равно а) 3; б) 6; в) 4?

С.Стефанов. Решение — в №8–1984

864. Назовём красивым разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.

а) Для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение. Докажите это.

б*) Существует ли красивое разбиение равностороннего треугольника?

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

А.В.Савкин. Решение — в №8–1984

865. Для любых $n+1$ натуральных чисел $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ докажите неравенство

$$\frac{1}{\text{НОК}[a_0, a_1]} + \frac{1}{\text{НОК}[a_1, a_2]} + \ldots + \frac{1}{\text{НОК}[a_{n-1}, a_n]} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n},$$

если а) $n = 2$; б) $n = 3$; в*) n — любое натуральное число. *Б.М.Ивлев.* *Решение — в №8–1984*

866. а) Во всех клетках прямоугольника размером а) 20×20; б) 21×21; в) $m \times n$ стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d? (Расстояние измеряем по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.) *С.С.Кротов и Н.Б.Васильев. Турнир городов апреля 1984 года.* *Решение — в №9–1984*

867. На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом в каждой паре рост мальчика отличается от роста девочки не более чем на дециметр. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться не более чем на дециметр.
А.Г.Печковский. Турнир городов апреля 1984 года. *Решение — в №9–1984*

868. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды не прямые. Из вершин основания в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие между собой основания высот каждой грани, параллельны одной плоскости.
И.Ф.Шарыгин, Н.Б.Васильев, В.Н.Дубровский и В.Л.Гутенмахер. Турнир городов апреля 1984 года. *Решение — в №9–1984*

869*. Пары последовательных натуральных чисел (8;9) и (288;289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит каждый свой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Укажите ещё одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.
А.В.Анджанс. Турнир городов апреля 1984 года. *Решение — в №9–1984*

870. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живёт несколько (конечное число!) пианистов. В одной комнате может жить и несколько пианистов. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й — приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней переселения прекратятся. *В.Г.Ильичёв. Турнир городов апреля 1984 года.* *Решение — в №9–1984. Статья Л.Д.Курляндчика и Д.В.Фомина «Этюды о полуинварианте» седьмого номера 1989 года*

871. В каждую клетку таблицы размером 3×3 записаны числа 1 или -1. Затем одновременно число в каждой клетке заменяют на произведение чисел, расположенных во всех соседних клетках (соседними считаем клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что после нескольких таких операций во всех клетках будут только единицы. *И.К.Жук и И.В.Воронович. Всесоюзная олимпиада 1984 года.* *Решение — в №10–1984*

872. На плоскости расположены три окружности ω_1, ω_2 и ω_3 радиусов r_1, r_2 и r_3 — каждая вне двух других, причём $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2 проведены касательные к окружности ω_3, а из точки пересечения внешних касательных к ω_1 и ω_3 — касательные к ω_2. Докажите, что последние две пары касательных образуют четырёхугольник, в который можно вписать окружность, и найдите её радиус.
Л.П.Купцов и В.Н.Дубровский. Всесоюзная олимпиада 1984 года. *Решение — в №10–1984*

873. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трёхчлен $x^2+20x+10$. Можно ли утверждать, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трёхчлен с целыми корнями? *А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада 1984 года.* *Решение — в №10–1984*

874*. При каких целых m и n выполнено равенство а) $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$; б) $(a+b\sqrt{d})^m=(b+a\sqrt{d})^n$, где a и b — взаимно простые натуральные числа, d — натуральное число, $d>1$, а среди делителей числа d нет ни одного квадрата простого числа? *Ю.В.Михеев. Всесоюзная олимпиада 1984 года.* *Решение — в №10–1984 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

875*. По кругу написано n натуральных чисел, причём $n>2$, а отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех n таких отношений а) не меньше $2n$; б*) меньше $3n$. *О.Р.Мусин, Ю.В.Михеев и Н.Б.Васильев. Всесоюзная олимпиада 1984 года.* *Решение — в №10–1984*

876. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B, отличные от точек касания. Прямая, касающаяся окружности в точке B, пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E. Докажите равенство длин отрезков BC и DE. *А.С.Меркурьев. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №11–1984*

877. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 вырезали 99 квадратиков размера 2×2 каждый. Докажите, что из этого листа можно вырезать ещё один такой квадратик. *С.В.Фомин. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №11–1984*

878. Если сумма величин плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра её основания. Докажите это. *Ю.И.Ионин и А.В.Смирнов. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №11–1984*

879. Если a, b, c, d, e — целые числа, причём $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечётное простое число p, то $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ делится на p. Докажите это. *С.В.Фомин. 50-я ленинградская олимпиада.* *Статья «Теорема Виета и вспомогательный многочлен» двенадцатого номера 1984 года*

880*. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, 0, 9, 8, 5, ... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1. *А.С.Меркурьев. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №11–1984*

881. Сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трёх вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвёртой вершины. Докажите это. *С.Е.Рукшин. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №12–1984*

882. Если сумма трёх целых чисел равна нулю, то сумма их четвёртых степеней — удвоенный квадрат целого числа. Докажите это. *Л.Д.Курляндчик, А.С.Меркурьев и С.В.Фомин. 50-я ленинградская олимпиада.* *Решение — в №12–1984. Статья «Теорема Виета и вспомогательный многочлен»*

883. В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы

а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета? (Расстояние между клетками — наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую.)

б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г, были покрашены в четыре разных цвета?

А.Г.Печковский и И.В.Итенберг. 50-я ленинградская олимпиада. *Решение — в №12–1984*

884. Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения также на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что её график можно покрыть n прямоугольниками площади $1/n^2$ каждый, стороны которых параллельны осям координат. *А.В.Анджанс. Апрельский турнир городов 1984 года.* *Решение — в №1–1985*

885*. Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ количество разбиений числа n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаем одинаковыми). Количество различных чисел в разбиении назовём его *разбросом*. Сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n а) равна $1 + p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$; б) не превосходит $p(n)\sqrt{2n}$. Докажите это.
А.В.Зелевинский и С.Ю.Оревков. Апрельский турнир городов 1984 года. *Решение — в №1–1985*

886. Можно ли в $4n-4$ клеток, расположенных по периметру квадрата размером $n \times n$, расставить $4n-4$ последовательных целых числа (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали равнялись одному и тому же числу s? Решите задачу для n, равного а) 3; б) 4; в) 5; г) 1985. Если расстановка возможна, найдите допустимые значения s.
В.Г.Болтянский и Н.Б.Васильев. *Решение — в №2–1985*

887. Из точки C к окружности проведены две касательные CA и CB, где A и B — точки касания. Вторая окружность проходит через точку C, касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам. *И.Ф.Шарыгин. X Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2–1985*

888. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют равенству $ab = cd$. Докажите, что число $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$ составное.
А.В.Анджанс. X Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–1985*

889. Существуют ли на плоскости такие три точки A, B и C, что для любой точки P плоскости длина хотя бы одного из отрезков PA, PB и PC иррациональна?
А.М.Слинько. X Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–1985*

890. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км дорог. Сможет ли она соединить сетью дорог все свои города?
Л.Д.Курляндчик и С.В.Резниченко. X Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–1985*

891. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный. *А.А.Муратов.* *Решение — в №3–1985*

892. а) Среди чисел вида $2^m + 2^k$, а также среди чисел вида $3^m + 3^k$ бесконечно много квадратов, а среди чисел вида $4^m + 4^k$, $5^m + 5^k$ или $6^m + 6^k$ нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, не равные друг другу). Докажите это.

б*) Есть ли квадраты среди чисел вида $7^m + 7^k$?
А.И.Зайчик и В.Н.Дубровский. *Решение — в №3–1985*

893. Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из $n-1$ цветов так, чтобы от каждого блока отходило $n-1$ проводов разного цвета, если а) $n = 6$; б) $n = 13$?
В.Б.Алексеев. 47-я московская олимпиада 1984 года. *Решение — в №3–1985*

894. а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила $1/5$.

б*) По кругу расставлено $n \geqslant 4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит $1/4$. *С.Б.Гашков и А.Н.Дранишников. 47-я московская олимпиада 1984 года.* *Решение — в №3–1985*

895*. Площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Докажите это, когда сечение — а) треугольник; б) четырёхугольник.

в) В случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани куба. Докажите это.

С.Б.Гашков, И.Ф.Шарыгин и В.Н.Дубровский. 47-я московская олимпиада 1984 года. *Решение — в №3–1985*

896. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый. Окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский. *Решение — в №4–1985*

897. Найдите хотя бы одну такую пару $x; y$ целых чисел, что $(x+y)^7-x^7-y^7$ делится на 7, а $xy(x+y)$ не делится на 7. *А.П.Савин.* *Решение — в №4–1985*

898. Для нечётных натуральных чисел $a<b<c<d$ выполнены равенства $ad=bc$, $a+d=2^k$ и $b+c=2^m$, где k и m — некоторые натуральные числа. Докажите, что а) $a=1$; б) для каждого $m \geqslant 3$ существует и единственен набор чисел a, b, c, d и k, удовлетворяющий этим условиям. *А.П.Савин.* *Решение — в №4–1985*

899. Назовём округлением числа x замену его на одно из двух чисел $[x]$ или $-[-x]$. (Таким образом, при округлении целое число не меняем, а нецелое заменяем на одно из двух целых чисел, между которыми оно расположено.)

а) Докажите, что в любом равенстве вида

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

все слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.

б) В прямоугольную таблицу записаны некоторые числа, причём суммы по строкам и суммы по столбцам — целые числа. Докажите, что все числа таблицы можно округлить так, что суммы ни по строкам, ни по столбцам не изменятся.

в) Пусть теперь суммы по строкам и суммы по столбцам не обязательно целые. Докажите, что все числа таблицы можно округлить так, что как суммы по строкам, так и суммы по столбцам будут округлениями соответствующих «бывших» сумм.

А.П.Савин. *Решение — в №4–1985*

900. Может ли проекция на плоскость выпуклого шестигранника быть а) 8-угольником; б) 9-угольником?

в*) Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого n-гранника?

М.Д.Ковалёв. *Решение — в №4–1985*

1985 год

901. Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что если $IK = IM$, то $AC = BC$ или величина угла ACB равна 60°.

В.Л.Гутенмахер. Решение — в №5–1985

902. Натуральный ряд разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что первый член хотя бы одной из этих прогрессий кратен её разности.

А.В.Келарев. Решение — в №5–1985

903. Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей ни через одну вершину, является многоугольником с а) чётным; б) нечётным числом сторон? *А.А.Дороговцев, Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский.* Решение — в №5–1985

904*. Для каждого натурального числа $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ положим $D(A) = a_n + 2a_{n-1} + \ldots + 2^{n-1}a_1 + 2^n a_0$. Например, $D(1985) = 1+2\cdot 9+4\cdot 8+8\cdot 5 = 91$, $D(91) = 9+2\cdot 1 = 11$ и $D(16) = 1 + 2\cdot 6 = 13$.

а) Для любого натурального числа A в последовательности $A_0 = A$, $A_1 = D(A_0)$, $A_2 = D(A_1)$, $A_3 = D(A_2)$, $\ldots$ есть такое число $A^* < 20$, что $D(A^*) = A^*$. Докажите это.

б) Найдите A^* для $A = 19^{85}$. *Е.И.Гурвич и А.Л.Фёдоров.* Решение — в №5–1985

905*. Уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ в натуральных числах x и y а) не имеет решений при $n = 1$; б) имеет по крайней мере два решения при $n = 2$; в*) имеет бесконечно много решений при $n = 2$; г*) не имеет решений ни для какого натурального $n > 2$. Докажите эти утверждения.

Десятиклассник М.Гараев. Решение — в №6–1985 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» четвёртого номера 2002 года

906. а) Для любого натурального a уравнение $xy = a(x+y)$ имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y. Докажите это.

б) Найдите количество решений этого уравнения в натуральных числах при $a = 1985$. *М.В.Славинский.* Решение — в №6–1985

907. Если $3\angle A + 2\angle B = 180^\circ$, то $BC^2 = AB^2 - AB\cdot AC$. Докажите это.

Т.А.Джортменадзе. Решение — в №6–1985

908. На стороне AB треугольника AB выбрана точка P, и через неё проведены прямые, параллельные AB и AC соответственно, до пересечения со сторонами AC и BC в точках M и N соответственно. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину? Решите задачу для а) треугольника с прямым углом C; б*) произвольного треугольника ABC. *Э.Г.Готман.* Решение — в №6–1985

909. а) Докажите существование арифметической прогрессии, состоящей из четырёх различных членов, каждый из которых — более чем первая степень натурального числа.

б) Существует ли сколь угодно длинная такая прогрессия?

в) А бесконечно длинная?

Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая г) ни одной более чем первой степени натурального числа; д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

Р.Н.Азизян, В.Толстых, А.В.Аляев и Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1985

910. На сторонах правильного шестиугольника взяты точки A_1, A_2, …, A_6. Известно, что три попарно не смежные стороны A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ определяют треугольник KLM, вершины которого лежат на продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трёх других сторон шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.
С.Ю.Оревков и В.Н.Дубровский. *Решение — в №6–1985*

911. На сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами выпуклого четырёхугольника, причём его площадь не зависит от выбора точек E и F. *М.В.Старк.* *Решение — в №7–1985*

912. а) Многочлен x^2; б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией. Докажите это. *В.П.Пикулин, А.Ю.Вайнтроб и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №7–1985*

913. Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведённые в точках A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PC

а) пересекает сторону AB в точке K, делящей её в отношении $AC^2 : BC^2$;

б) симметрична медиане, проведённой из C, относительно биссектрисы угла C треугольника. *Десятиклассник С.Литовченко и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №7–1985*

914. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и так далее). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
В.Г.Ильичёв и Н.Б.Васильев. *Решение — в №7–1985*

915*. Для любых положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$. *В.Г.Ильичёв.* *Решение — в №7–1985*

916. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника. *А.А.Азамов.* *Решение — в №8–1985*

917. а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Номера билетов меняются от 000 000 до 999 999. Билет называем счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних цифр.) *С.Ю.Оревков.* *Решение — в №8–1985*

918*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа — 3, 4 и 5. *В.В.Прасолов.* *Решение — в №8–1985*

919. Докажите а) равенство $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx + \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

б*) неравенства $9 < \int\limits_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int\limits_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001$. *Ю.И.Ионин.* *Решение — в №8–1985*

920. а) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = x^2y^2z^2$ в натуральных числах.

б*) Уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ имеет решение в натуральных числах только при $n = 1$ или 3. Докажите это и найдите все решения.
Р.А.Мазов и В.Н.Le,hjdcrbq. *Решение — в №8–1985*

921. Известны величины углов $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а его удвоенная площадь равна $AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Найдите отношения длин сторон $AB : BC : CD : DA$, если а) $\alpha = 5\pi/12$ и $\beta = 7\pi/12$; б) $\alpha = \pi/2$ и $\beta = \pi/3$?

В.Л.Гутенмахер. Вступительный экзамене на экономический факультет МГУ, 1984 год. *Решение — в №9–1985*

922. Уравнение $\sin^p x + \cos^q x = 1$, где $p > 0$ и $q > 0$, имеет решение $x \in (0; \pi/2)$ тогда и только тогда, когда $(p-2)(q-2) < 0$ или $p = q = 2$. Докажите это.

А.М.Седлецкий. *Решение — в №9–1985*

923. Площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость численно равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости. Докажите это.

С.Л.Табачников. *Решение — в №9–1985*

924. Каждые две из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называем ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB и BA. Например, на рисунке всего три ориентированных треугольника.

а) Расставьте стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б*) Каково наибольшее возможное число ориентированных треугольников (для каждого n)? Нарисуйте соответствующие примеры для $n = 4$, 5 и 6.

Десятиклассник И.И.Цаленчук и В.Н.Дубровский. *Решение — в №9–1985*

925. На белой плоскости расположена синяя фигура K_0. Из неё получается новая синяя фигура K_1 по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам M плоскости: если не менее половины площади круга радиуса 1 с центром в точке M занято синим цветом, то точка M становится синей, а если менее половины — то белой. На следующем шаге из полученной синей фигуры K_1 по тому же правилу получается фигура K_2, затем из неё — фигура K_3 и так далее. Докажите, что а) для произвольной ограниченной фигуры K_0, начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если K_0 — круг радиуса 100, то это случится не позже чем через миллион шагов. *А.Л.Тоом.* *Решение — в статье «Кляксы на плоскости» девятого номера 1985 года*

926. Если $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ и $xu + yv = 0$, то $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ и $xy + uv = 0$. Докажите это.

С.В.Дужин. *Решение — в №10–1985*

927*. На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведено несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешено менять: если какие-то два из них, AC и BD, пересекаются, их можно стереть и провести отрезки AB и а) CD; б) BC. (Если «новый» отрезок уже проведён, проводить его во второй раз не нужно.) Можно ли несколькими такими заменами (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

В.Е.Колосов и Н.Б.Васильев. *Решение — в №10–1985. Поправка к решению — на странице 19 одиннадцатого номера 1985 года*

928. В кинотеатре $N+1$ место. Сначала N человек, имеющие билеты с указанием мест (в их числе и Игорь), сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять своё место; если оно занято,— сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придётся пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)

И.Б.Алексеев-Астафьев. *Решение — в №10–1985*

929. Натуральные числа a, b, c, d и e удовлетворяют равенству $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Докажите, что по крайней мере а) три из них чётны; б) три делятся на 5; в) два делятся на 10. *В.Д.Яковлев. Решение — в №10–1985. Комментарий — в задаче М540*

930*. Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что хотя бы в одном из них есть три числа, одно из которых равно сумме двух других, или два числа, одно из которых вдвое больше другого.
Девятиклассник А.Д.Валиев и В.Н.Дубровский. Решение — в №10–1985

931. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC и CA в точках C', A' и B' соответственно. Если $AA'=BB'=CC'$, то треугольник ABC равносторонний. Докажите это.
А.Н.Дранишников. Московская городская олимпиада. Решение — в №11–1985

932. В квадратной клетке со стороной 1 м находится анаконда длиной 10 м. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он в любой момент может прострелить её сразу в 6 местах. Не хвастает ли он? (Анаконду можете считать ломаной длины 10, расположенной внутри квадрата 1×1.) *С.Б.Гашков. Московская городская олимпиада. Решение — в №11–1985*

933. 13 рыцарей из k разных кланов, где $1<k<13$, сидят за круглым столом. Каждый держит золотой или серебряный кубок, причём золотых кубков ровно k штук. Король Артур приказал своим рыцарям одновременно передать кубки своим соседям справа, потом сделать то же самое ещё раз и так далее. Докажите, что найдутся такой момент времени и такие два рыцаря из одного клана, что в руках у них — золотые кубки.
А.А.Болотов и С.Б.Гашков. Московская городская олимпиада. Решение — в №11–1985

934. В пространстве расположены $2n$ точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Проведены n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют а) хотя бы один треугольник; б*) не менее n треугольников. *С.Б.Гашков. Московская городская олимпиада. Решение — в №11–1985*

935*. Внутри правильного $2n$-угольника с центром O произвольным образом расположен правильный $2n$-угольник с вдвое меньшей стороной. Докажите, что он накрывает точку O, если а) $n=2$; б) $n=3$; в) n — любое натуральное число, не равное 1.
С.Б.Гашков. Московская городская олимпиада. Решение — в №11–1985

936. За $3n+1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжёлый из $2n+2$ камней, если: а) $n=3$; б) n — любое натуральное число. Докажите это. *С.В.Фомин. Апрельский Турнир городов 1985 года. Решение — в №12–1985*

937. Существует ли такая а) произвольная; б) выпуклая фигура, что ею нельзя накрыть полукруг радиуса 1, а двумя её экземплярами можно накрыть круг радиуса 1?
Н.Б.Васильев и А.Г.Самосват. Апрельский Турнир городов 1985 года. Решение — в №12–1985

938*. Радиус круга, центр которого — точка O, равномерно вращается, поворачиваясь каждую секунду на угол величиной $360^\circ/n$, где n — натуральное число, большее 3. В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду — положение OM_1, ещё через 2 секунды — положение OM_2, через 3 секунды после этого — положение OM_3 и так далее, наконец, ещё через $n-1$ секунд — положение OM_{n-1}.

а) Если n — степень числа 2, то радиусы OM_0, OM_1, ..., OM_{n-1} делят круг на n равных секторов. Докажите это.

б) Возможно ли это при других значениях n?
В.В.Произволов. Апрельский Турнир городов 1985 года. Решение — в №12–1985

939. В клетки таблицы размером 10×10 записали каким-либо образом цифры так, что каждая цифра встречается 10 раз.

а) Возможно ли, что в каждой строке и в каждом столбце не более 4 различных цифр?

б*) Докажите, что хотя бы в одной строке или хотя бы в одном столбце не менее 4 различных цифр.

Л.Д.Курляндчик и Н.Н.Константинов. Апрельский Турнир городов 1985 года. Решение — в №12–1985

940*. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовём цепочкой такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий (пример изображён на рисунке). Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата нужно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» — множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют её целиком, не налегая друг на друга?

А.И.Гольберг, В.А.Гурвич и Н.Б.Васильев. Апрельский Турнир городов 1985 года. Решение — в №12–1985

941. Дан правильный $(4k+2)$-угольник $A_0A_1\ldots A_{4k+1}$ с центром O. Докажите, что сумма длин отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1} (на рисунке проиллюстрирован случай $k=2$), равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$-угольника, если а) $k=2$; б) k — любое натуральное число.

И.Ф.Шарыгин и В.Н.Дубровский. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №1–1986

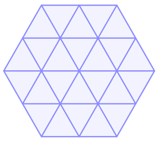
942. Первые $2n$ натуральных чисел разбиты на два множества по n чисел в каждом. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — числа первого множества, расположенные в порядке возрастания, а $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ — числа второго множества, расположенные в порядке убывания. Докажите равенство $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2$.

В.В.Произволов. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №1–1986

943. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... задана формулами $a_{2n}=a_n$, $a_{4n-3}=1$, $a_{4n-1}=0$ для любого натурального n. Докажите, что эта последовательность непериодическая.

Ю.В.Нестеренко. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №1–1986. Статья Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера «Кривые дракона» второго номера 1970 года

944*. Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как показано на рисунке. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения найдутся 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.



А.А.Берзиньш. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №1–1986

945*. Для любой строго возрастающей неограниченной последовательности положительных чисел a_1, a_2, a_3, ... для всех достаточно больших k сумма $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$ меньше числа а) $k-1$; б) $k-1985$. Докажите это.

Л.Д.Курляндчик. Всесоюзная олимпиада. Решение — в №1–1986

946. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Л.П.Купцов. XI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1986

947. На доске написаны числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{12}$.

а) Докажите, что как бы мы ни расставляли знаки «$+$» и «$-$» между этими числами, выражение не будет равно 0.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «$+$» и «$-$» между оставшимися числами значение выражения равнялось 0?

С.В.Резниченко. XI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1986

948. Если равносторонний треугольник покрыт пятью меньшими равными равносторонними треугольниками, то его можно покрыть четырьмя такими треугольниками. Докажите это. (Треугольник рассматриваем вместе с его внутренней областью; треугольники разрешено передвигать.)

В.В.Произволов. XI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1986

949. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ... , 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и количество гирь, и сумма масс были одинаковы во всех пяти группах? *Е.П.Ерошенков. XI Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–1986

950. Двадцать пять коротышек хотят получить по единичному квадратику в квадрате размером 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки никаких двух поссорившихся коротышек не были бы соседними. (Соседними называем участки, имеющие общую сторону.)

С.В.Конягин. XI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1986

951. Длины всех сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1. Докажите, что радиус описанной окружности хотя бы одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1. *Е.Хорват (Венгрия) и В.Н.Дубровский.* Решение — в №3–1986

952. а) Приведите пример числа a, удовлетворяющего равенству $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$.

б) Любое такое число a иррационально. Докажите это.

Здесь фигурные скобки обозначают дробную часть данного числа, то есть разность между самим числом и его целой частью. Целая часть данного числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данного числа. *И.Варга (Румыния).* Решение — в №3–1986

953. На плоскости даны 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проводятся все 15 прямых, соединяющих попарно эти точки. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются три из этих 15 прямых?

В.В.Прасолов. Решение — в №3–1986

954. а) В треугольник вписан прямоугольник со сторонами a и b так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника. Пусть a_1 и b_1 — длины проекций треугольника на прямые, параллельные сторонам a и b соответственно. Докажите равенство $\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} = 1$.

б) В тетраэдр вписан прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b и c так, что все его вершины лежат на поверхности тетраэдра. Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины проекций треугольника на прямые, параллельные рёбрам a, b и c соответственно. Докажите равенство $\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1} = 1$. *В.Н.Дубровский.* Решение — в №3–1986

955*. За круглым столом сидят n участников «безумного чаепития». Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наименьшее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в обратном порядке (так что левые соседи у каждого станут правыми и наоборот)? Решите эту задачу для а) $n = 4$, 5 или 6; б) любого натурального $n \geqslant 3$. *В.Б.Алексеев и В.Н.Дубровский.* Решение — в №3–1986

956. На плоскости проведены четыре окружности одинакового радиуса так, что три из них проходят через точку A и три — через точку B. Докажите, что четыре точки их попарного пересечения, отличные от A и B,— вершины параллелограмма.

Десятиклассники В.Капович и И.Капович, В.Н.Дубровский. *Решение — в №3–1986*

957. Из любых 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23, можно выбрать четыре числа, произведение которых — четвёртая степень целого числа. Докажите это. *Н.Б.Васильев и Д.Б.Фукс. XXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №4–1986*

958*. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — неотрицательные целые числа. Докажите, что у многочлена $(1+x)^{a_1}+(1+x)^{a_2}+\ldots+(1+x)^{a_n}$ не меньше нечётных коэффициентов, чем у многочлена $(1+x)^{a_1}$.

Н.Б.Васильев и Д.Б.Фукс. XXVI Международная олимпиада. *Решение — в №4–1986*

959*. В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более чем $1/(k-1)$ часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединённые между собой авиалинией, если а) $k=3$; б) k — натуральное число, $k>1$.

А.А.Разборов. *Решение — в №4–1986*

960*. Если разность кубов двух последовательных натуральных чисел — квадрат некоторого натурального числа n, то n представимо в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

а) Докажите это утверждение.

б) Вот пример таких чисел: $8^3 - 7^3 = (2^2+3^2)^2$; приведите ещё хотя бы один пример.

в) Докажите, что таких примеров бесконечно много. *Р.Лайнесс (Великобритания), А.П.Савин и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №4–1986 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

1986 год

961. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка E, а на стороне CD — точка F, причём $AE:EB=1/2$ и $CF=CD$. Подобны ли треугольники AKE и CFL?

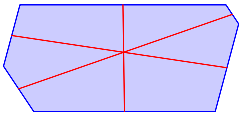
А.П.Савин, В.Н.Дубровский и Н.А.Паравян. *Решение — в №5–1986*

962. Ни для какого многочлена P с целыми коэффициентами не существуют такие не равные одно другому целые числа x_1, x_2, ..., x_n, что $n>2$ и $x_2=P(x_1)$, $x_3=P(x_2)$, ..., $x_n=P(x_{n-1})$, $x_1=P(x_n)$. Докажите это.

Д.Раду (Румыния). *Решение — в №5–1986*

963. Каждая сторона шестиугольника параллельна противоположной его стороне. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Десятиклассник Т.Газарян. *Решение — в №5–1986*



964. В любой последовательности a_1, a_2, a_3, ... различных натуральных чисел, удовлетворяющей для любого натурального n неравенству $a_n<100n$, есть число, в десятичной записи которого встречается а) цифра 1; б) 1986 единиц подряд. Докажите это.

А.А.Столин. *Решение — в №5–1986*

965. Дано шесть чисел a_1, a_2, ..., a_6. Чтобы подсчитать «в лоб»сумму их попарных произведений $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Научитесь находить сумму этих чисел и — одновременно — суммы их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №5–1986*

966. Любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куска, из которых можно составить два подобных ему треугольника. Докажите это.

Л.Д.Курляндчик и Н.Б.Васильев. *Решение — в №6–1986*

967. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n), а через $\varphi(n)$ — количество чисел, не превосходящих числа n и взаимно простых с n. Докажите для любого натурального n неравенство $\sigma(n)+\varphi(n)\geqslant 2n$.

В.Ф.Лев. *Решение — в №6–1986*

968. Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке O.

а) Докажите существование плоскости, площади проекций на которую этих трёх многоугольников равны.

б) Сколько существует таких плоскостей, проходящих через точку O?

Н.М.Седракян и А.Онукян. *Решение — в №6–1986*

969. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$.

Г.Г.Алиханов. *Решение — в №6–1986*

970. На начальной остановке в автобус вошли 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если он собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если — раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а те, кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из ещё не отменённых (если таких две — до первой из них). Какое а) наименьшее; б) наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?

С.Л.Елисеев. Решение — в №6–1986

971. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выбрать из них такие команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D, команда B выиграла у C и D, а C выиграла у D. *А.Т.Украинцев.* Решение — в №7–1986

972. Последовательность x_1, x_2, x_3, ... задана условиями $x_1 = 1/2$ и $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ для любого натурального n. Найдите $\left[\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{100}}\right]$.

А.В.Анджанс. Решение — в №7–1986

973. AH — высота, а BE — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что если $\angle BEA = 45^\circ$, то и $\angle EHC = 45^\circ$. *И.Ф.Шарыгин и В.Н.Дубровский.* Решение — в №7–1986

974. Двое играют в шахматы с часами. После того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.

а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более, чем на 1 минуту 50 секунд.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут? *С.В.Фомин.* Решение — в №7–1986

975. На доске размером $n \times n$ стоят 20 разных фигур, каждая из которых с любого поля бьёт не более 20 полей.

а) Докажите, что при $n = 100$ эти фигуры можно передвинуть так, чтобы они не били друг друга.

б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьёт, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n = 30$ эти 20 фигур можно передвинуть так, чтобы они не били друг друга. *А.К.Толпыго.* Решение — в №7–1986

976. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол величиной 45°. Один пересекает сторону BC в точке E, а диагональ BD — в точке P, другой — сторону CD в точке F, а диагональ BD — в точке Q. Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APQ. *Э.Г.Готман.* Решение — в №8–1986

977. Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов f и g получить x, если а) $f = x^2 + x$ и $g = x^2 + 2$; б) $f = x^2 + x$ и $g = x^2 - 2$; в) $f = 2x^2 + x$ и $g = 2x$; г) $f = 2x^2 + x$ и $g = x^2$? *С.И.Кублановский.* Решение — в №8–1986

978. Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два непересекающихся равносторонних треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$?

Е.А.Карлов и И.К.Дмитриев (Болгария). Решение — в №8–1986

979. Пусть k и n — натуральные числа, $2 \leqslant k \leqslant n$. Назовём набор k положительных чисел a_1, a_2, ..., a_k, меньших 1, исключительным, если для любого разбиения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ числа n на неотрицательные слагаемые хотя бы одно из чисел $a_j n_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$,— целое.

а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?

б) Каковы эти наборы? *Е.А.Горин.* Решение — в №8–1986

980. Внутри выпуклого а) многоугольника; б) многогранника $A_1A_2\ldots A_n$ взята точка O. Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов A_jOA_k, где $1\leqslant j<k\leqslant n$, не менее чем $n-1$ имеют величину от 90° до 180°. *В.Г.Болтянский и В.Н.Дубровский.* Решение — в №8–1986

981. Число 11 ... 1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 28 различных делителей. Докажите это. *Л.Д.Курляндчик.* Решение — в №9–1986

982. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам $A1A2$, B_1B_2 и C_1C_2, восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.
Восьмиклассник Н.Азамов и В.Н.Дубровский. Решение — в №9–1986

983. В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.

а) Приведите пример такого турнира, 10 любых участников которого можно расставить так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.

б) Докажите, что если условие пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом. *К.П.Кохась и Н.Б.Васильев.* Решение — в №9–1986

984. Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q. Докажите, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящей через точки K, B и Q, с окружностью, проходящей через точки K, D и P, лежит на диагонали BD.
В.Н.Дубровский. Решение — в №9–1986

985. Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке O, называем угол между их лучами с вершиной O, не превосходящий 90°. Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2 и l_3 так, чтобы углы между l_2 и l_3, l_3 и l_1, l_1 и l_2 соответственно равнялись данным величинам α_1, α_2 и α_3? (Две тройки прямых не различаем, если они конгруэнтны, то есть если поворотами вокруг осей и симметриями относительно плоскостей можно одну тройку перевести в другую.)

Предостережение. Ответ зависит от величин α_1, α_2 и α_3. Например, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ он не такой, как для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70^\circ$.
А.Б.Гончаров и В.Н.Дубровский. Решение — в №9–1986

986. Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.
Н.Б.Васильев. Решение — в №10–1986

987. В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых ещё не играли между собой.
М.Бона (ученик гимназии, Венгрия). Решение — в №10–1986

988.* Из точки O на плоскости проведены n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого натурального числа k, где $2k<n$, по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O, лежит не менее k векторов, то длина суммы всех векторов не превосходит $n-2k$. *П.А.Калугин и В.В.Произволов.* Решение — в №10–1986

989. Найдите все такие натуральные числа a, для которых число $a-1$ является суммой а) двух; б*) трёх делителей числа a (не обязательно различных; множеству делителей принадлежит и 1).

в*) Для любого n существует лишь конечное число таких натуральных a, что $a-1$ является суммой n натуральных делителей числа a (не обязательно различных).
В.В.Батырев и Н.Б.Васильев. Решение — в №10–1986. Комментарий — в статье «Разбиение единицы» седьмого номера 1987 года

990. В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти прямые

а) проходят по рёбрам?

б) проходят по рёбрам и диагоналям граней?

в) содержат 6 вершин параллелепипеда? *В.Н.Дубровский.* Решение — в №10–1986

991. CH — высота, а CK — медиана треугольника ABC. На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE = \angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN. Докажите, что точки M, H, K и N лежат на одной окружности.
Журнал «Математика» (Болгария). Решение — в №11–1986

992. Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трёх других так, что среди четырёх собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.
Журнал «Математика» (Болгария). Решение — в №11–1986

993. а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.

б*) При $2 < n < 11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат. Докажите это.
Журнал «Математика» (Болгария). Решение — в №11–1986

994*. При каком наибольшем k неравенство $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqslant k(ab+bc+ca)^2$ верно при всех значениях a, b и c? *Журнал «Математика» (Болгария).* Решение — в №11–1986

995. Функция f определена и непрерывна на всём множестве вещественных чисел и удовлетворяет равенству $f(f(x)) = f(x) + x$ для любого x.

а) Найдите две такие функции f.

б*) Докажите, что других таких функций нет.
Журнал «Математика» (Болгария). Решение — в №11–1986

996. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого — красные. Докажите равенство суммы длин синих сторон восьмиугольника сумме длин его красных сторон.
В.В.Произволов. XX Всесоюзная олимпиада. Решение — в №12–1986

997. Сумма $\sum\limits_{1\leqslant m<n\leqslant 1996} \frac{1}{mn}$ не является целым числом. Докажите это.
Д.Митькин. XX Всесоюзная олимпиада. Решение — в №12–1986

998*. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырёхугольника $ABCD$, то есть сумма величин углов $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$, не зависит от выбора точек X и Y. *И.Ф.Шарыгин. XX Всесоюзная олимпиада.* Решение — в №12–1986

999*. а) Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n докажите неравенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Константу 4 в правой части неравенства б) можно заменить на 2; в) нельзя заменить числом, меньшим 2. Докажите это.
Л.Д.Курляндчик и А.С.Меркурьев. XX Всесоюзная олимпиада. Решение — в №12–1986

1000. В дугу AB вписана ломаная AMB, состоящая из двух отрезков, причём $AM > MB$. Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$. *Архимед (Сиракузы) и А.А.Егоров.* *Решение — в №12–1986. Статья А.В.Спивака «Ещё одно решение задачи М1000» на странице 22 третьего номера 2008 года*

1001. В куче 1001 камень. Её произвольно делим на две кучи, подсчитываем количества камней в них и записываем произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделываем ту же операцию: делим на две и записываем произведение чисел камней в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяем с одной из трёх полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равна сумма 1000 записанных произведений? *А.С.Меркурьев. Санкт-Петербургская олимпиада 1986 года.* *Решение — в №1–1987*

1002. а*) Рассеянный математик, забыв трёхзначный код своего подъезда, нажимает кнопки с цифрами $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Математик уверен, что даже в случае крайнего невезениям (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже чем через 1002 секунды (то есть 16 минут 42 секунды). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть в дом за наименьшее время?

Ответьте на аналогичный вопрос, если исправны б) только кнопки с цифрами 1, 2 и 3, а никакие другие цифры в код не входят; в*) все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.
Московская олимпиада 1986 года. *Статья М.Л.Гервера «Трёхзначные числа и орграфы» второго номера 1987 года*

1003. В треугольнике ABC проведены высоты AA', BB' и CC'. Докажите равенства $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'$.
С.А.Генкин. Санкт-Петербургская олимпиада 1986 года. *Решение — в №1–1987*

1004. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$, проводятся всевозможные прямые. Докажите, что

а) на каждой из них лежит не более чем одна точка M, отличная от вершины треугольника и такая, что $\angle ABM = \angle ACM$;

б) существует не более пяти таких прямых, на которых нет ни одной такой точки M. *О.Р.Мусин. Всесоюзная олимпиада 1986 года.* *Решение — в №1–1987*

1005. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$, где $n > 2$, заполняем числами ± 1 по следующим правилам:

- во все граничные клетки таблицы пишем числа -1;
- число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от неё и лежащих или в одной строке, или в одном столбце с ней. Так делаем до тех пор, пока все клетки таблицы не будут заполнены.

Какое а) наибольшее; б) наименьшее количество единиц может получиться в таблице? *Н.Х.Агаханов. Всесоюзная олимпиада 1986 года.* *Решение — в №1–1987*

1006. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырёхугольник.

а) Могут ли площади всех четырёх частей быть равными?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвёртой части? *Г.А.Гальперин и А.П.Савин.* *Решение — в №2–1987*

1007. Треугольник со сторонами a_1, b_1 и c_1 подобен треугольнику со сторонами a_2, b_2 и c_2 тогда и только тогда, когда $\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}+\sqrt{c_1c_2}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)}$. Докажите это. *В.П.Чичин и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №2–1987*

1008. Лестница состоит из $2n+1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй — переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать? *С.Л.Елисеев.* *Решение — в №2–1987*

1009. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведённой через точки C, K и L, лежит на окружности, проведённой через точки B, C и D.
И.Ф.Шарыгин. *Решение — в №2–1987*

1010. Последовательность r_1, r_2, r_3, ... определена условиями $r_1=2$, $r_{n+1}=r_1r_2\ldots r_n+1$. Например, $r_2=3$, $r_3=7$, $r_4=43$ и $r_5=1\,807$.

а) Докажите для любого натурального n неравенство $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}<1$.

б*) Пусть n натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше 1. Докажите, что эта сумма не превышает $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}$.

в*) Известные нам доказательства опираются на следующую лемму. Если среди всех наборов $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ вещественных чисел, удовлетворяющих равенству $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$, неравенствам $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant 0$ и неравенствам $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\leqslant\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}+\ldots+\alpha_n$, где $1\leqslant k<n$, выбран тот, для которого величина α_n наименьшая, то $\alpha_k=1/r_k$ при $1\leqslant k<n$ и $\alpha_n=1/(r_n-1)$. Докажите её.
О.Т.Ижболдин и Л.Д.Курляндчик. *Статья «Разбиение единицы» седьмого номера 1987 года. Комментарий — в статье А.Гейна «На пути к решению» седьмого номера 1978 года*

1011. Для любых n положительных чисел $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ докажите неравенства

а) $a_1^2-a_2^2+a_3^2\geqslant(a_1-a_2+a_3)^2$;

б) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2\geqslant(a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

в) $a_1^2-a_2^2+\ldots+(-1)^{n-2}a_{n-1}^2+(-1)^{n-1}a_n^2\geqslant(a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n-2}a_{n-1}+(-1)^{n-1}a_n)^2$.
Л.Д.Курляндчик и Н.Б.Васильев. *Решение — в №3–1987*

1012. а) На плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других. Докажите это.

б) Число 5 в предыдущем пункте нельзя заменить на 6. Докажите это.
Д.В.Фомин и В.Н.Дубровский. *Решение — в №3–1987; иллюстрация — на первой странице обложки того же номера*

1013. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Три параллельные прямые, проходящие через точки M, B и N, пересекают основание AC в точках K, D и L. Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) $KLMN$ не больше площади хотя бы одного из треугольников ABD и DBC.
В.В.Рождественский и В.Н.Дубровский. *Решение — в №3–1987*

1014. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b, что числа a_1+b, a_2+b, ..., a_n+b тоже попарно взаимно просты. *В.Ф.Лев и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №3–1987*

1015. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4+x^3+x^2+x+12$? *С.Л.Манукян и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №4–1987*

1016. Окружность с центром O вписана в многоугольник. P — центр масс этого многоугольника, K — центр масс его контура. Докажите, что точки P, O и K лежат на одной прямой, причём $PO = 2PK$. (При определении точки P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, а при определении точки K — как контур из однородной проволоки.) *И.З.Вайнштейн.* *Решение — в №4–1987*

1017*. Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число. Сумма всех пяти чисел положительна. Если трём последовательным вершинам приписаны числа x, y, z, причём $y < 0$, то эти числа заменяем соответственно на $x + y$, $-y$ и $z + y$. Такие операции выполняем, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов? *А.П.Савин. XXVII международная олимпиада.* *Решение — в №4–1987*

1018. Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника с центром O. Треугольник XYZ конгруэнтен треугольнику OAB и вначале совпадает с ним, а затем движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X — внутри n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда Y и Z совершат полный оборот по границе n-угольника?
В.Н.Дубровский. XXVII международная олимпиада. *Решение — в №4–1987*

1019. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки этого множества в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы на каждой линии сетки количество белых узлов отличалось от количества красных узлов не более чем на 1. *А.П.Савин.* *Решение — в №4–1987*

1020*. На сфере радиуса 1 проведена а) кривая, длина которой меньше π; б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π. Докажите существование плоскости, проходящей через центр сферы и не пересекающей проведённой кривой. (Можете считать, что кривая состоит из нескольких дуг больших кругов.)
В.В.Прасолов, В.Н.Дубровский и Г.А.Гальперин. *Решение — в №4–1987*

1987 год

1021. Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночёвки в лагере у подножия скалы он может подниматься, навешивая верёвку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночёвки на скале — 30 метров в час. По готовой верёвке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он может достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъём по верёвке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебрегите.)

Н.Б.Васильев. Решение — в №5–1987

1022. Первые 8 натуральных чисел можно расставить в виде таблицы из двух строк и четырёх столбцов так, что сумма чисел верхней строки равна сумме чисел нижней строки, а суммы чисел в столбцах также равны между собой. Можно ли расставить подобным образом первые а) десять; б) двенадцать натуральных чисел?

1	4	6	7
8	5	3	2

в) При каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

М.И.Штеренберг. Решение — в №5–1987

1023. Среди любых ли 100 треугольников найдётся такой, который можно целиком покрыть остальными 99?

Г.А.Гуревич. Решение — в №5–1987

1024*. Для треугольника с углами α_1, β_1 и γ_1 и треугольника с углами α_2, β_2 и γ_2 докажите неравенство $\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_2}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma_2}\leqslant \operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\beta_1+\operatorname{ctg}\gamma_1$.

Р.П.Ушаков. Решение — в №5–1987

1025*. Две прямые, проведённые через одну и другую точку пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, разрезают его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если в два из них, не имеющие общей стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырёхугольник можно вписать окружность.

И.Ф.Шарыгин. Решение — в №5–1987

1026. а) Пять равных дуг AB, BC, CD, DE и EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части, как изображено на рисунке. Найдите величины дуг (в градусах). б) Тот же вопрос для «розетки» из m равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

А.В.Швецов. Решение — в №6–1987

1027. Число $1985!!+1986!!$ делится на 1987. Докажите это. Через $n!!$ обозначаем произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же чётность, то есть $n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$

В.В.Произволов. Решение — в №6–1987

1028. а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке (D и E). Постройте треугольник ABC, биссектрисы CD и AE которого лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и E.

б*) Если $\angle CDE=30^\circ$, то величина хотя бы одного из углов треугольника ABC равна 60° или 120°. Докажите это.

Десятиклассник М.А.Волчкевич (Москва). Решение — в №6–1987

1029. Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажите неравенство $n\geqslant 2^{k-1}$.

В.Ф.Лев. Решение — в №6–1987

1030*. Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ — сумму произведений длин его рёбер на величины соответствующих им внешних углов многогранника. (Внешний угол при данном ребре — это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, направленными во внешнюю область многогранника; сумма внешнего угла и соответствующего

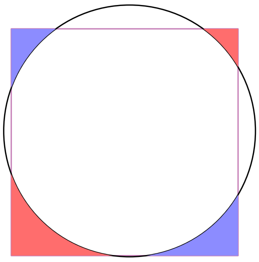
двугранного угла равна 180°.) Если выпуклый многогранник M лежит внутри выпуклого многогранника N, докажите неравенства а) $S(M) \leqslant S(N)$; б) $P(M) \leqslant P(N)$.
А.Б.Гончаров. *Решение — в №6–1987. Статья А.Б.Гончарова «Задача на исследование» девятого номера 1987 года*

1031. На плоскости дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. На прямой l выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B минимальная, и такая точка N, что $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.
Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №7–1987*

1032. Выписаны n чисел $2, 3, \ldots, n+1$, их всевозможные произведения по два, по три, и так далее до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$.

Например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot3}=1$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=2$.
А.В.Анджанс. *Решение — в №7–1987*

1033. Окружность отрезает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, примыкающих к противоположным углам квадрата, в синий цвет, два других — в красный. Докажите равенства сумм длин красных и синих а) дуг; б) отрезков.
В.В.Произволов. *Решение — в №7–1987*



1034. Прямоугольная шоколадка размером 5×10 разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинающий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части и кладёт на стол полученные части. Затем игроки по очереди делают аналогичные операции: каждый раз очередной игрок разламывает одну из частей на две части. Тот, кто первый отломит квадратную дольку (без углублений), а) проигрывает; б) выигрывает. Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш: начинающий или его партнёр?
С.В.Фомин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №7–1987*

1035. На отрезке $[0;1]$ отмечаем сначала точку x_0, а затем $x_1, \ldots, x_n$. Для каждой очередной точки x_k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, измеряем расстояние d_k до ближайшей к ней из ранее поставленных точек. Докажите неравенство $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \leqslant 1 + \frac{\log_2 n}{2}$.
В.С.Гринберг. *Решение — в №7–1987*

1036. Существует ли невыпуклый пятиугольник, который можно разрезать на два конгруэнтных пятиугольника?
С.М.Хосид. *Решение — в №8–1987*

1037. Решите в натуральных числах уравнение $x^y - y^x = x + y$.
А.И.Зайчик и В.Н.Дубровский. *Решение — в №8–1987*

1038. а) Если произведение mn натуральных чисел m и n делится на 6, причём $m > 1$ и $n > 1$, то прямоугольник размером $m \times n$ можно разрезать на трёхклеточные уголки. Докажите это.

При каких m и n это можно сделать так, чтобы линии раздела не вырезали ни одного прямоугольника б) размером 2×3; в) площади меньше mn?
Девятиклассник М.Хованов и А.П.Савин. *Решение — в №8–1987. Иллюстрация — на четвёртой странице обложки того же номера*

1039. Точки A, B, C и D — вершины тетраэдра. Докажите, что а) если $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$, то все эти скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными рёбрами тетраэдра равны, то они прямые.
В.Э.Матизен. *Решение — в №8–1987*

1040*. Числа 1, 2, 3, ..., $3n$ произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать по одному числу из каждой группы так, чтобы одно из них равнялось сумме двух других.
В.Е.Алексеев и С.Савчев (Болгария). *Решение — в №8–1987*

1041. На плоскости заданы а) четыре; б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите его остальные вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)
М.И.Гринчук. 50-я московская городская олимпиада. *Решение — в №9–1987*

1042. В классе проходит турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учеников этого класса (из одного, двух, трёх и так далее человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой, состоящей из всех остальных учеников класса.
И.Н.Сергеев. 50-я московская городская олимпиада. *Решение — в №9–1987*

1043. Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого n числа n, $n-50$ и $n+1987$ принадлежали трём разным подмножествам? *С.В.Конягин. 50-я московская городская олимпиада.* *Решение — в №9–1987*

1044. Из любых четырёх чисел всегда можно выбрать два таких числа x и y, что отношение числа $x-y$ к числу $1+xy$ принадлежит отрезку $[0;1]$.
И.Н.Сергеев. 50-я московская городская олимпиада. *Решение — в №9–1987*

1045*. В некотором царстве, некотором государстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решил созвать всех подданных к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень послал с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передавать любое указание любому другому жителю, и так далее. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/час в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала. *С.В.Конягин. 50-я московская городская олимпиада.* *Решение — в №9–1987*

1046. Величина угла A остроугольного треугольника ABC равна 60°. Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведёнными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности этого треугольника.
Десятиклассник В.Погребняк (Винница) и В.Н.Дубровский. Восьмой весенний Турнир городов. *Решение — в №10–1987*

1047. В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее $3/4$ всех сыгранных к этому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.
М.Бона, ученик гимназии, Венгрия. Восьмой весенний Турнир городов. *Решение — в №10–1987, поправка к условию — на странице 42 двенадцатого номера 1987 года*

1048*. Один из двух играющих («начинающий») ставит коня на некоторую клетку шахматной доски размером а) 8×8; б) $m\times n$, где $m\geqslant n>2$. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»); нельзя ставить коня на поле, где конь уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. У кого из игроков есть выигрышная стратегия — у начинающего или у его партнёра?
Десятиклассник В.Зудилин (Бельцы). Восьмой весенний Турнир городов. *Решение — в №10–1987*

1049. Будем говорить, что в цилиндр $Ц_1$ вписан боком другой цилиндр $Ц_2$, если две образующие второго лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго — на боковой поверхности первого. Взяв цилиндр $Ц_1$, у которого отношение диаметра к высоте равно k, впишем в него боком (если это возможно), цилиндр $Ц_2$, в него впишем $Ц_3$, в него — $Ц_4$ и так далее. При каких значениях k

а) можно вписать $Ц_2$, но нельзя вписать $Ц_3$;

б*) можно вписать T_{10}, но нельзя $Ц_{11}$;

в*) можно вписать бесконечную последовательность $Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$, ... ?
Одиннадцатиклассник В.Столин (Вильнюс). *Решение — в №10–1987*

1050. На отрезке [—1; 1] выбрано k различных точек, для каждой из которых посчитано произведение расстояний до остальных $k-1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что а) $S \geqslant 2$ при $k=3$; б*) $S \geqslant 4$ при $k=4$. *Л.Д.Курляндчик.* *Решение — в №10–1987*

1051. В левый нижний угол шахматной доски поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от неё, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3 в а) левом; б) правом верхнем углу доски? *Я.Е.Брискин. Восьмой весенний Турнир городов.* *Решение — в №11–1987*

1052. Из n четырёхугольников, отсекаемых от выпуклого n-угольника диагоналями, не более $n/2$ могут оказаться описанными около окружности. а) Докажите это. б) Приведите пример восьмиугольника, у которого таких четырёхугольников четыре. *Н.М.Седракян. Восьмой весенний Турнир городов.* *Решение — в №11–1987*

1053. В последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , где каждое число равно сумме двух предыдущих, для любого $m > 3$ не менее четырёх и не более пяти m-значных чисел. Докажите это. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №11–1987*

1054. Шесть точек попарного касания четырёх сфер всегда лежат на одной сфере или в одной плоскости. Докажите это. *Ю.К.Коба и В.Н.Дубровский.* *Решение — в №11–1987*

1055. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120°.
А.Ф.Сидоренко и В.Н.Дубровский. Восьмой весенний Турнир городов. *Решение — в №11–1987*

1056. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате размером 2×2 сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел таблицы не превосходит 1987.
А.С.Меркурьев и С.Иванов. *Решение — в №12–1987*

1057. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещено писать делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите её.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.
Д.В.Фомин и Д.Иванов. *Решение — в №12–1987*

1058. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много. *Д.Г.Флаас и Д.Румынин.* *Решение — в №12–1987*

1059. График функции $y = f(x)$, определённой на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на 90° вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции. *А.В.Клюшин и А.Каринский. Решение — в №12–1987*

1060*. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечётным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырёхугольника. *Ю.Хозлов, А.Сердюков и Д.Г.Флаас. Решение — в №12–1987*

1061. В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Для любых трёх городов A, B и C по этой сети дорог можно проехать из A в B, не заезжая в C. Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.
В.Е.Колосов и Н.Б.Васильев. Решение — в №1–1988

1062. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки D и E. Прямые BD и CE пересекаются в точке M, AM и BC — в точке P, AM и DE — в точке N. Докажите равенство $\frac{PN}{NA} = 2 \cdot \frac{PM}{MA}$.

б) На рёбрах SA, SB и SC тетраэдра $ABCS$ взяты точки D, E и F соответственно. Плоскости ABE, BCD и CAF пересекаются в точке M; прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N соответственно. Докажите равенство $\frac{PN}{NS} = 3 \cdot \frac{PM}{MS}$. *Т.А.Джортменадзе, Е.Я.Глейбман и В.Н.Дубровский. Решение — в №1–1988*

1063. Сколько существует целых чисел, представимых в виде разности $a - \tilde{a}$, где a — число, записываемое в десятичной системе счисления n цифрами (то есть $10^{n-1} \leqslant a < 10^n$), а $\tilde{a}$ — число, получаемое при записи цифр числа a в обратном порядке? (Например, если $a = 1917$, то $a - \tilde{a} = 1917 - 7191 = -5724$.) Найдите ответ для а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) любого натурального n. *Г.О.Эльстинг. Решение — в №1–1988*

1064. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если число n а) нечётно; б) чётно? (Предполагаем, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и никакие три звена не пересекаются в одной точке.) *Д.Б.Фукс. Решение — в статье «Самопересечения замкнутой ломаной» первого номера 1988 года*

1065*. Рассмотрим векторы $(x; y)$ с целыми неотрицательными координатами. Назовём такой вектор образующим, если $|x - y| = 1$.

а) Рассматриваемый вектор $(x; y)$ представим в виде суммы нескольких различных образующих (или сам является образующим) тогда и только тогда, когда величина $k(x, y) = x + y - (x - y)^2$ неотрицательна. Докажите это.

б) Количество $n(x, y)$ различных (с точностью до порядка слагаемых) представлений вектора $(x; y)$ в виде суммы различных образующих (быть может, состоящей из единственного слагаемого) зависит только от $k(x, y)$. Докажите это; найдите $n(13, 18)$. *Ф.В.Вайнштейн. Статья «Разбиение чисел» последнего номера 1988 года*

1066. Шесть точек расположены на плоскости так, что все пятнадцать расстояний между ними не больше 1. Докажите, что из них можно выбрать три точки, все расстояния между которыми меньше 1. *С.Г.Сальников. Решение — в №2–1988*

1067. Для любых положительных чисел x, y и z, сумма квадратов которых равна 1, докажите неравенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В.Э.Матизен. Решение — в №2–1988

1068. Дан треугольник AOB. Постройте прямую l, проходящую через точку O так, чтобы площади треугольников AOC и BOD, где C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны.

Р.О.Бурдин и В.Н.Дубровский. Решение — в №2–1988

1069. В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами. Если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагаем, что и до, и после обмена каждая семья живёт в отдельной квартире.)

Н.Н.Константинов и А.И.Шнирельман. Восьмой весенний Турнир городов. Решение — в №2–1988

1070. Тетраэдр пересечён тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным рёбрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трёх сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.

В.Н.Дубровский. Решение — в №3–1988

1071. На доске нарисовано поле для игры «в цифры»:

(((((((((_ * _) * _) * _) * _) * _) * _) * _) * _) * _)

Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела (_) какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоящую слева звёздочку (*) на знак сложения или умножения. При этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляют значение полученного выражения. Если это число чётное, то выигрывает первый игрок, нечётное — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

С.А.Генкин. Санкт-Петербургская олимпиада 1987 года. Решение — в №4–1988

1072. Разложите на простые множители число $989\cdot1001\cdot1007+320$.

С.В.Фомин. Санкт-Петербургская олимпиада 1987 года. Решение — в №3–1988

1073. Из точки O все стороны шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ видны под углом 60°, причём $OA_1>OA_3>OA_5$ и $OA_2>OA_4>OA_6$. Докажите неравенство $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1$.

А.С.Меркурьев. Санкт-Петербургская олимпиада 1987 года. Решение — в №3–1988

1074. Дана стопка из $2n+1$ карточек, с которой разрешено производить следующие две операции:

- сверху снимаем часть карточек и перекладываем вниз с сохранением порядка;
- верхние n карточек с сохранением порядка выкладываем в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.

Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ расположений карточек.

Д.В.Фомин и В.Н.Дубровский. Санкт-Петербургская олимпиада 1987 года. Решение — в №3–1988

1075. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая некрайняя цифра меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.

С.Е.Рукшин. Санкт-Петербургская олимпиада 1987 года. Решение — в №4–1988

1076. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N, отличной от A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите равенство площадей четырёхугольника $AKNM$ и треугольника ABC.

И.А.Кушнир. Международная олимпиада, 1987 год. Решение — в №4–1988

1077. Обозначим через $p_k(n)$ количество перестановок n-элементного множества, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите равенства: а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = n!$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 \cdot p_k(n) = n!$.

В.Н.Дубровский, Л.М.Каганов и Дж.Голдман. Международная олимпиада, 1987 год. Решение — в №4–1988

1078. Функция f определена на множестве всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n)) = n + 1987$ не выполнено хотя бы для одного неотрицательного целого числа n.

В.В.Вавилов. Международная олимпиада, 1987 год. Решение — в №4–1988

1079. При каких $n > 2$ можно расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным число, а площадь треугольника с вершинами в любых трёх — рациональным числом (отличным от нуля)?

В.В.Вавилов. Международная олимпиада, 1987 год. Решение — в №4–1988

1080. q — натуральное число. Докажите, что если число $k^2 + k + q$ простое для любого целого неотрицательного $k \leqslant \sqrt{q/3}$, то число $k^2 + k + q$ простое для любого целого неотрицательного k, где $k < q - 1$.

В.Ф.Лев. Международная олимпиада, 1987 год. Решение — в №4–1988

1988 год

1081. Предпоследняя цифра десятичной записи числа 3^n для любого натурального $n > 2$ чётна. Докажите это. *В.И.Плачко.* *Решение — в №5–1988*

1082. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что сумма $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ вдвое превышает сумму $AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$ тогда и только тогда, когда диагонали AC и BD перпендикулярны или одна из них делится точкой O пополам. *А.П.Савин.* *Решение — в №5–1988*

1083. Наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно a.

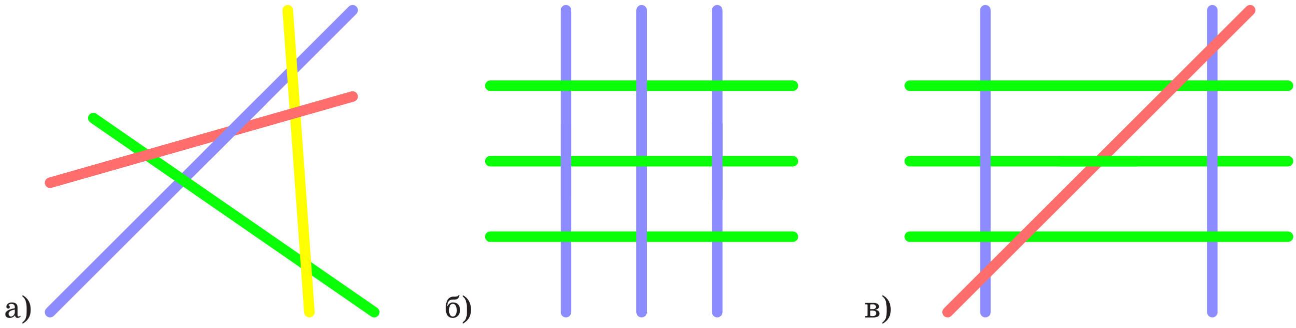
а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

б) Когда достигается равенство? *Л.Г.Ханин.* *Решение — в №5–1988*

1084. Две окружности на плоскости пересекаются в точках A и B. Докажите существование такой точки $C \neq B$, что любая окружность с хордой AC будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удалённых от C.
Десятиклассник В.Ю.Протасов (Москва). *Решение — в №5–1988*

1085*. Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, спроецировали на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже:



Могла ли получиться проекция, изображённая на рисунке? *С.Л.Табачников.* *Решение — в №5–1988. Комментарий — в статье О.Я.Виро и Ю.В.Дроботухиной «Сплетения скрещивающихся прямых» третьего номера 1988 года, в статье С.Л.Табачникова «Линейные неравенства и задача М1085» шестого номера 1989 года и в статье А. Скопенкова «Ещё раз о сплетающихся прямых» одиннадцатого номера 1989 года*

1086. С числом разрешено производить две операции: «увеличить вдвое» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить а) 100; б) n, если сумма цифр двоичной записи числа n равна s? *М.В.Сапир.* *Решение — в №6–1988*

1087. Рассмотрим треугольник ABC, точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1 и C_1 точки M на высоты, проведённые из вершин A, B и C соответственно. Докажите, что

а) существует одна и только одна точка M, для которой длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник окружности. *А.Х.Джафаров.* *Решение — в №6–1988*

1088. Если $pq+qr+pr=1$, причём числа p, q и r рациональные, то число $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ — квадрат рационального числа. Докажите это.

Иштван Варга (Румыния) и В.Н.Дубровский. *Решение — в №6–1988*

1089. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K, L, M и N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что произведение периметров четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$ не меньше учетверённой площади четырёхугольника $ABCD$.

Д.Ю.Бураго и Ф.Л.Назаров. *Решение — в №6–1988*

1090. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

б) Докажите, что неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$.

Ю.В.Дейкало. *Решение — в №6–1988*

1091. Назовём натуральное число удачным, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.

а) Найдите наименьшее такое число a, что числа a и $(a+1)$ — удачные.

б) Существует ли такое a, что числа a, $a+1$ и $(a+2)$ — удачные?

Н.И.Зильберберг. *Решение — в №7–1988*

1092. Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз сложили, перегибая каждый раз по какой-нибудь прямой, и затем разрезали по некоторой прямой. Какое наибольшее число кусков могло получиться?

С.В.Казаков. *Решение — в №7–1988*

1093. На окружности в n точках расставлены числа 0, 1 и 2. Затем одновременно во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяем на 0, а затем к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляем 1. Пусть вначале на окружности k двоек, где $k\geqslant 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n-k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n-k$ нулей.

Н.Александру (Румыния) и Н.Б.Васильев. *Решение — в №7–1988*

1094. a, b и c — неотрицательные числа. а) Докажите, что из неравенства $a^4+b^4+c^4\leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ следует неравенство $a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$.

б) Верно ли обратное, то есть следует ли из второго неравенства первое?

В.А.Сендеров. *Решение — в №7–1988*

1095. На плоскости задана окружность с центром в точке O и две точки A и B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O. Постройте хорду MN этой окружности, видную из точки A под углом α и а) параллельную прямой AB; б) проходящую через точку B (если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN).

Р.О.Бурдин. *Решение — в №7–1988*

1096. Диаметр d окружности разбит на k равных частей, и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех проведённых хорд не меньше $0,5\cdot kd$ и не больше $0,8\cdot kd$.

Десятиклассники Р.Харитонов и А.Чагиров. *Решение — в №8–1988*

1097. Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат длины основания — чётное число. *В.В.Произволов. Решение — в №8–1988*

1098. На окружности расставлены n точек, занумерованных подряд числами $1, 2, \ldots, n$. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую две точки с номерами одной чётности. Никакая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведёнными ранее. Побеждает тот, кто делает последний ход. При каждом $n = 4, 5, 6, \ldots$ выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию: начинающий или его партнёр. *В.Г.Чванов. Решение — в №8–1988*

1099*. В отряде, ведущем подготовку к полёту на Марс, 6 783 космонавта, причём известно, что среди любых четырёх из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж. *Н.Н.Силкин и М.В.Волков. Решение — в статье «Кого послать на Марс?» восьмого номера 1988 года. Комментарий — в статье М.Гарднера «Рамсеевская теория графов» четвёртого номера 1988 года*

1100*. На берегу прямолинейной реки лежат брёвна (то есть не пересекающие друг друга отрезки; их конечное число). Каждое бревно составляет с линией берега угол, величина которого меньше 45°. Докажите, что для любого расположения брёвен существует бревно, которое можно закатить в реку, не задевая остальных. (Поворачивать бревно при качении нельзя.) *В.Г.Ильичёв. Решение — в №8–1988*

1101. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что $AD = BC = EC$ и треугольник ADE равнобедренный. Каким может быть угол при вершине A? *В.Кириак (Румыния). Решение — в №9–1988*

1102. Существуют n различных натуральных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа, если а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) n — любое натуральное число, большее 2. Докажите это. *Л.Д.Курляндчик. Решение — в №9–1988*

1103. а) На бесконечной разграфлённой на клеточки плоскости несколько — быть может даже бесконечно много — клетчатых прямоугольников размером 1×2 закрашены так, что никакие два закрашенных прямоугольника не имеют ни одной общей точки (даже вершины). Докажите, что оставшуюся незакрашенной часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2.

б*) Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько клетчатых прямоугольников размером $m \times n$, никакие два из которых не имеют ни одной общей точки. Докажите, что если mn делится на 2, то оставшуюся незакрашенной часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2, а если mn нечётно, то это не всегда возможно. *Десятиклассник М.Хованов. Решение — в №9–1988*

1104. Грани ABC и BCD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны, а угол BAC прямой. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных рёбер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник. *В.Н.Дубровский. Решение — в №9–1988*

1105. После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскости. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», то есть отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился а) прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$; б) равнобедренный треугольник с углом величиной 120°, причём в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно её середины. *Н.П.Долбилин и М.И.Штогрин. Решение — в №9–1988*

1106. Каждая из трёх прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке. *В.В.Произволов. Решение — в №10–1988*

1107. a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3$. *Л.Д.Курляндчик. Решение — в №10–1988. Статья «Стороны треугольника» третьего (9/10) номера 1993 года*

1108. В выпуклом n-угольнике, где $n > 3$, никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нём можно провести так, чтобы все части, накоторые они разобьют n-угольник, были треугольниками? *Десятиклассник М.Хованов (Москва). Решение — в №10–1988*

1109. В одном старом задачнике по геометрии есть такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y = x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равна а) 3; б) 1988?

В.С.Шевелёв, Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский. Решение — в №10–1988

1110*. Для каждого натурального $n > 1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n. Докажите, что а) среднее арифметическое всех $n(n-1)/2$ выписанных чисел неограниченно растёт с ростом n, но не превосходит $1+\ln n$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 ни при каком n.

Н.Б.Васильев и В.Ф.Лев. Решение — в №11/12–1988

1111. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к ней, проведённые в точках A и C, пересекают касательную, проведённую в точке B, в точках M и N соответственно. В треугольнике ABC из вершины P на сторону AC опущена высота BP. Докажите, что прямая BP делит угол MNP пополам.

Б.И.Чиник. Решение — в №11/12–1988

1112. На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешено дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно написать ещё и число $ab+a+b$. Можно ли так получить число а) 13 121; б) 12 131?

Существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде в) $x+y+xy$; г) $x+y+2xy$ с натуральными x и y. Докажите это.

А.А.Берзиньш и В.Г.Ильичёв. Решение — в №11/12–1988

1113*. В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно? *Д.В.Фомин. Решение — в №11/12–1988*

1114. Произведение диаметра вписанного шара любого тетраэдра на сумму длин любых двух его скрещивающихся рёбер меньше произведения длин этих двух рёбер. Докажите это. *И.Ф.Шарыгин и Н.Б.Васильев. Решение — в №11/12–1988*

1115*. а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовём отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.

б) Пусть n, m, k — натуральные числа. Докажите, что если $1+2+\ldots+n = mk$, то числа 1, 2, ..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

А.В.Анджанс. Решение — в №11/12–1988. Исправление условия — на странице 31 восьмого номера 1988 года

1116. Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью а) 36; б) S, стороны которого идут по линиям сетки? (Считаем узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки считайте равной 1.) *Н.Б.Васильев и В.Л.Гутенмахер.* *Решение — в №1–1989. Статья «Вокруг формулы Пика» двенадцатого номера 1974 года*

1117. а) Для произвольного треугольника существуют три окружности с центрами в его вершинах, попарно касающиеся друг друга.

б) Если через середины дуг, образующихся при пересечении окружностей пункта а) с внутренностью треугольника, провести касательные, то образуются четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трёх других. Докажите это. *А.А.Горбачёв.* *Решение — в №1–1989*

1118. а) Уравнение $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Докажите это.

б) Сколько имеется решений, где $z = 1988$?

С.Г.Мамиконян и Н.Б.Васильев. *Решение — в №1–1989*

1119. Назовём k-звездой фигуру на плоскости, состоящую из k лучей с общим началом, разбивающих плоскость на k равных углов (по $360^\circ/k$). При каких $k > 2$ верно следующее утверждение: для любых k точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует k-звезда, в каждом из k углов которой содержится ровно одна из этих k точек?

Десятиклассник М.Хованов. *Решение — в №1–1989*

1120. а) Все коэффициенты многочлена P целые, причём $P(x) > x$ для любого положительного числа x. Рассмотрим последовательность, заданную формулами $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$ для любого натурального n. Докажите для любых натуральных m и n равенство $\text{НОД}(a_m, a_n) = a_{\text{НОД}(m,n)}$.

б) Докажите аналогичное равенство для последовательности Фибоначчи, задаваемой равенствами $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ для любого натурального n.

В.Ф.Лев и Н.Б.Васильев. *Решение — в №1–1989*

1121. Дан треугольник ABC. Прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский. *Решение — в №2–1989*

1122. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1,\\ (x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2,\\ (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3,\\ (x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4,\\ (x_2+x_3+x_4)^5 = 3x_5.\end{cases}$$

Л.Тутеску (Румыния). *Решение — в №2–1989*

1123. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы как каждый вертикальный, так и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

Н.Б.Васильев и В.С.Шевелёв. *Решение — в №2–1989*

1124. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают некоторую прямую в шести точках, то есть высекают на ней пять отрезков.

а) Докажите, что если крайние (первый и пятый) отрезки равны, то соседние с ними (второй и четвёртый) также равны.

б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую так, чтобы все пять отрезков были равны? *Э.Г.Готман.* *Решение — в №2–1989*

1125. Рассмотрим последовательность слов, состоящую из букв А и В. Первое слово в последовательности — А; k-е слово получается из $(k-1)$-го с помощью следующей операции: каждую букву А заменяем на ААВ, каждую букву В — на А:

А,
ААВ,
ААВААВА,
ААВААВАААВААВАААВ,
ААВААВАААВААВАААВААВААВАААВААВАААВААВААВА,
. . . .

а) Докажите, что каждое слово является началом следующего и тем самым определена бесконечная последовательность букв ААВААВАААВААВАААВ . . .

б*) На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква А?

в*) Эта последовательность непериодическая. Докажите это.

Н.Б.Васильев и В.М.Гальперин. *Решение — в №3–1989*

1126. На боковых сторонах BC и AD трапеции $ABCD$ выбраны точки K и M соответственно. Докажите, что если $\angle BAM = \angle CDK$, то $\angle BMA = \angle CKD$.

В.Н.Дубровский и А.С.Меркурьев. Санкт-Петербургская олимпиада 1988 года. *Решение — в №3–1989*

1127. Микрокалькутятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу x обратное число $1/x$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить число 1, начав с числа а) $\sqrt{19}+88$; б) $\sqrt[19]{80}$; в) $\sqrt{19}+\sqrt{88}$.

А.В.Богомольная. Санкт-Петербургская олимпиада 1988 года. *Решение — в №3–1989*

1128. На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своём исходном поле.

Е.В.Абакумов. Санкт-Петербургская олимпиада 1988 года. *Решение — в №3–1989*

1129*. В лесу барона Мюнхгаузена растут ёлки и берёзы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой ёлки растёт в точности 10 берёз, причём ёлок в его лесу больше, чем берёз. Может ли это быть?

Ф.Л.Назаров. Санкт-Петербургская олимпиада 1988 года. *Решение — в №3–1989*

1130. На плоскости дан выпуклый многоугольник со сторонами длин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причём длины проекций многоугольника на прямые, на которых лежат эти стороны, равны $d_1, d_2, \ldots, d_n$ соответственно. Докажите неравенство $2 \leqslant \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} \leqslant 4$.

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская олимпиада 1988 года. *Решение — в №3–1989*

1131. Пусть n — натуральное число, $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ — подмножества множества B, каждое из которых состоит из n элементов. Пусть пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ состоит из одного элемента, а каждый элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Для каких n можно утверждать, что некоторые элементы множества B можно отметить так, чтобы каждое из множеств A_1, A_2, ..., A_{2n+1} содержало ровно n отмеченных элементов? *В.В.Вавилов. XXIX международная олимпиада.* Решение — в №4–1989

1132. Функция f определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет следующим условиям: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$, $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$. Найдите количество всех таких значений n, для которых $f(n) = n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1998$.
В.В.Вавилов. XXIX международная олимпиада. Решение — в №4–1989

1133. Множество решений неравенства $\sum\limits_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988. Докажите это.
В.В.Вавилов. XXIX международная олимпиада. Решение — в №4–1989

1134. AD — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников BCD и ACD, пересекает стороны AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите неравенство $S_{ABC} \geqslant 2S_{CKL}$. *В.Н.Дубровский. XXIX международная олимпиада.* Решение — в №4–1989

1135. Если a, b — такие натуральные числа, что a^2+b^2 делится на $ab+1$, то $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ — квадрат целого числа. Докажите это.
Н.Б.Васильев и В.В.Вавилов. XXIX международная олимпиада. Решение — в №4–1989

1136*. Для любых положительных чисел A, M, S докажите неравенство

$$3+A+M+S+\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}+\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A} \geqslant \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

Д.П.Мавло и П.Х.Диананда. Решение — в №5–1989

1137. Величины всех углов выпуклого многоугольника равны. Из некоторой точки, расположенной внутри этого многоугольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что многоугольник — правильный. *К.П.Кохась.* Решение — в №5–1989

1138*. Для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ есть три натуральных числа, произведение некоторых двух из которых делится на третье. Докажите это.
Л.Д.Курляндчик. Решение — в №5–1989

1139. а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?
В.Э.Матизен. Решение — в №5–1989

1140. Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку». Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых.

а) Количество непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше количества областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке таких областей 7).

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получилась одна кривая?

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга. Может ли в результате получиться одна кривая? *С.Л.Табачников.* Решение — в №5–1989

1989 год

1141. Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из её диагоналей образует с основанием угол, величина которого не больше 45°.

Н.М.Седракян, Н.Б.Васильев и В.Н.Дубровский. *Решение — в №6–1989*

1142. Таблица размером $m \times n$ заполнена числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырёх чисел, стоящих в углах таблицы, равна s. Чему равна сумма всех чисел таблицы?

Н.Б.Васильев. *Решение — в №6–1989*

1143. Масса каждой из 101 гирек, расположенных по окружности — натуральное число, а сумма их масс равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, сумма масс которых равна 200 г.

В.В.Произволов. *Решение — в №6–1989*

1144. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — неотрицательные числа. Какое число больше: $\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \ldots + a_n^{1988}}$ или $\sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \ldots + a_n^{1989}}$?

А.И.Шехорский. *Решение — в №6–1989*

1145*. Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причём $\angle BPC > 90^\circ$. На меньшей дуге BC взята точка A. Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности, проведённой в точке A, не превосходит площади треугольника ABC.

В.Ю.Протасов. *Решение — в №6–1989*

1146. Точка K — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN = 60^\circ$. Докажите равенство периметра треугольника MCN половине периметра треугольника ABC.

Э.Г.Готман и В.Н.Дубровский. *Статья «О свойствах центра вневписанной окружности» девятого номера 1989 года*

1147. Задано несколько точек, соединённых отрезками двух цветов: некоторые пары точек — синими отрезками, некоторые другие — красными. В любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, количество красных отрезков чётно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а синий — точки из одного множества.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №7–1989*

1148. Для любого натурального числа n и любого числа a, удовлетворяющего неравенству $a > 1$ и не равного ни одному из чисел вида $\sqrt[m]{n}$, где m, n — натуральные числа, докажите равенство

$$[\log_a 2] + [\log_a 3] + \ldots + [\log_a n] + [a] + [a^2] + \ldots + [a^k] = nk,$$

где $k = [\log_a n]$.

В.Б.Алексеев и Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №7–1989*

1149. На плоскости заданы два луча p и q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности — одна с центром на луче p, проходящая через точку P, и другая — с центром на луче q, проходящая через Q,— касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M.

В.В.Шабунин и В.Н.Дубровский. *Решение — в №7–1989*

1150*. Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n докажите неравенство

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}.$$

Десятиклассник Е.Г.Моисеев. *Решение — в №7–1989*

1151. а) Докажите равенство $\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{2^2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$.

б) Найдите сумму $\frac{1\cdot 3!}{3}+\frac{2\cdot 4!}{3^2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+2)!}{3^n}$. *В.Н.Жоха и Н.Б.Васильев. Решение — в №8–1989*

1152. Пусть h и l — длины высоты и биссектрисы треугольника, проведённых из одной вершины треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $\frac{h}{l}\geqslant\sqrt{\frac{2r}{R}}$.
К.Берчеану и И.Варга (Румыния), В.Н.Дубровский. Решение — в №8–1989

1153. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, побывавшей по одному разу на всех полях шахматной доски?
М.Г.Хованов. Решение — в №8–1989

1154*. Если четырёхугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведённая через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите это. *В.Ю.Протасов и В.Н.Дубровский. Решение — в №8–1989. Статья А.А.Заславского «Диагонально-перпендикулярное отображение четырёхугольников» четвёртого номера 1998 года*

1155. Точка движется внутри треугольника, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения».

а) Докажите, что ни в одном треугольнике нет четырёхзвенной периодической траектории. На рисунке показаны синяя траектория периода 3 и зелёная — периода 6. Периодической траекторией называем замкнутую ломаную, которая не проходит ни через одну из вершин треугольника и является траекторией периодического движения некоторой точки.

Существует ли остроугольный треугольник, внутри которого есть периодическая траектория из б) 5; в) 7 звеньев? *Г.А.Гальперин и А.М.Стёпин. Решение — в статье «О треугольном бильярде» одиннадцатого номера 1989 года. Комментарий — в статье «Периодические движения бильярдного шара» третьего номера 1989 года*

1156. Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четвёрку. Каждые две команды встречаются один раз, за выигрыш дают два очка, за ничью — одно, за проигрыш — 0 очков. Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четвёрку? *Десятиклассник Санжар Хаджиев. Решение — в №9–1989*

1157. Три треугольника — белый, красный и зелёный — имеют общую внутреннюю точку M. Докажите, что можно выбрать по одной вершине каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника с вершинами в выбранных точках трёх разных цветов. *Имре Барани (Венгрия). Решение — в №9–1989*

1158. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(x+z)$, если x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=1$. *Десятиклассник О.Христенко. Решение — в №9–1989*

1159. С помощью двусторонней линейки постройте угол величиной 30°. Разрешены следующие операции:

- проведение прямой через две точки,
- проведение прямой, параллельной данной, на расстоянии, равном ширине линейки.

А.В.Полев. Решение — в №9–1989

1160. У одного конца A прямолинейной дороги AB собрались 10 кенгуру и начали играть в чехарду. Они прыгают по очереди: первый каждый раз прыгает, куда хочет; второй прыгает через первого так, чтобы первый оказался точно посередине между началом и концом прыжка, третий точно так же прыгает через второго и так далее, десятый прыгает через девятого, затем начинается новая серия прыжков по тем же правилам.

а) Могут ли через 10 серий прыжков все кенгуру собраться в точке B?

б) Могут ли они собраться там раньше? *С.Л.Елисеев.* Решение — в №9–1989

1161. В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров. Докажите, что если в нём поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (то есть центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке). *Н.П.Долбилин.* Решение — в №10–1989

1162. Решите в целых числах уравнение $x^3 - 13xy + y^3 = 13$. *Д.В.Фомин.* Решение — в №10–1989

1163. Черепаха вышла из точка A и пришла в точку B, двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B. Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B), не превосходит пути первой. *А.Х.Шень и С.Ю.Оревков.* Решение — в №10–1989

1164. Натуральное число n называют совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например, $28 = 1+2+4+7+14$). Докажите, что нечётное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, 5 и 7. *В.В.Шабунин.* Решение — в №10–1989

1165. Квадрат со стороной длины n, расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками размера 1×1, не может покрыть более $(n+1)^2$ узлов сетки. Докажите это. *Д.Дж.Ньюмен и Б.Д.Котляр.* Статья «О числе целых точек в плоском множестве» десятого номера 1989 года

1166. Если a, b, c — длины сторон треугольника, $p+q+r = 0$, то $a^2pq+b^2qr+c^2rp \leqslant 0$. Докажите это. *Десятиклассник Я.Ш.Мустафаев (Баку). Осенний Турнир городов 1988 года.* Решение — в №11–1989

1167. Сколько существует перестановок чисел 1, 2, ..., n, в которых для любого числа k, стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $k-1$ и $k+1$ находится левее k? *А.В.Анджанс. Осенний Турнир городов 1988 года.* Решение — в №11–1989

1168*. В стране 1 989 городов и 4 000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите существование кольцевого маршрута, проходящего не более чем через 20 городов. *А.А.Разборов. Осенний Турнир городов 1988 года.* Решение — в №11–1989

1169. Точка M лежит внутри прямоугольника $ABCD$. Докажите, что площадь этого прямоугольника не превосходит величины $AM \cdot CM + BM \cdot DM$. *И.Я.Гольдшейд. Осенний Турнир городов 1988 года.* Решение — в №11–1989

1170. Рассмотрим разбиения данного выпуклого n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем перестройкой следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC, служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD. Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки: а) $P(n) > n-4$; б) $P(n) < 2n-6$; в*) $P(n) < 2n-9$ при $n > 12$. *Д.В.Фомин. Осенний Турнир городов 1988 года.* Статья «Разбиения многоугольников и ... неевклидова геометрия» двенадцатого номера 1989 года

1171. Обозначим $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Докажите для любого натурального числа n неравенство

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2} + \frac{1}{3h_3^2} + \ldots + \frac{1}{nh_n^2} < 2.$$

Л.Д.Курляндчик. Решение — в №12–1989

1172. Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки OA и OB, выходящие из начала O прямоугольной системы координат в пространстве, если точка A имеет координаты $(x; y; z)$, а точка B — координаты $(y; z; x)$?

С.Н.Бычков. Решение — в №12–1989

1173*. Через точку, расположенную внутри треугольника площади S, проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекают две из них. Докажите, что площади S_1, S_2 и S_3 трёх образовавшихся при этом треугольников удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \leqslant \frac{9}{S}.$$

Г.Н.Зайцев, В.Н.Дубровский и В.В.Произволов. Решение — в №12–1989

1174*. Рассмотрим последовательность, заданную тремя первыми членами $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$ и формулой $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Докажите для любого натурального n, что $1 + 4a_n a_{n+1}$ — квадрат натурального числа. *Р.Козарев (Болгария) и С.Дойчев (Болгария), Н.Б.Васильев.* Решение — в №12–1989

1175*. При каких натуральных n верно следующее утверждение: как бы ни были разложены на плоскости несколько непересекающихся правильных n-угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать n-угольник нельзя: лучи, выходящие из точек выбранного n-угольника в нужном направлении, не должны задевать остальных n-угольников.)

Д.А.Терёшин. Решение — в №12–1989

1176. Квадраты $AKBM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, внутри которого лежат точки K и L. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $(MN^2 - KL^2)/4$. *С.А.Столяров.* Решение — в №1–1990

1177. Для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, не превосходящих 1, докажите неравенство $(1 + x_1)^{1/x_2}(1 + x_2)^{1/x_3}(1 + x_3)^{1/x_4}\ldots(1 + x_n)^{1/x_1} \geqslant 2^n$.

К.П.Кохась и В.М.Телевка. Решение — в №1–1990

1178. а) Для любого нетупоугольного треугольника со сторонами a, b, c, радиусом вписанной окружности r и радиусом описанной окружности R докажите неравенство $2(r + R) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

б) Для каких треугольников оно обращается в равенство? *З.А.Скопец.* Решение — в №1–1990

1179. Найдите a_{1000}, если $a_1 = 0$ и для любого натурального n верно равенство а) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(a_n + 1)$; б) $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n + 1)$; в) $a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n + 1)$.

Б.А.Вертгейм. Решение — в №1–1990

1180. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B, на другой — C и D. Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите равенство проекций отрезков AB и CD на прямую AC.

И.Ф.Шарыгин. XXIII Всесоюзная олимпиада по математике. Решение — в №1–1990

1181. На шахматной доске стоят 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигуре. Докажите, что на чёрных клетках шахматной доски стоит чётное число фигур.

В.В.Произволов. XXIII Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1990

1182. В некоторой роще было n скворечников, причём все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие. Опять во всех скворечниках оказалось по скворцу, причём если расстояние между какими-то двумя скворцами было меньше расстояния между другими двумя скворцами (один скворец может участвовать в обеих парах), то после перелёта расстояние между первыми двумя скворцами больше расстояния между вторыми двумя. При каких n такое возможно? *А.А.Берзиньш. XXIII Всесоюзная олимпиада.* *Решение — в №2–1990*

1183. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Каждые два из них встретились около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встретились одновременно трое мальчиков.
А.В.Анджанс. XXIII Всесоюзная олимпиада. *Решение — в №2–1990*

1184. На всех шести рёбрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на рёбрах, выходящих из одной вершины, проведём плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость тоже касается вписанного шара.
И.Ф.Шарыгин. Московская олимпиада 1989 года. *Решение — в №2–1990*

1185. Придумайте положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ равенству $(x_1 + \ldots + x_k)(x_k + \ldots + x_n) = 1$, если а) $n = 3$; б) $n = 4$; в*) $n = 10$.

г*) Докажите, что эта система уравнений при любом натуральном n имеет единственное решение в положительных числах.
В.Ю.Протасов. Московская олимпиада 1989 года. *Решение — в №2–1990*

1186. Будем говорить, что два четырёхугольника — бумажный и картонный — подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом, если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырёхугольник, то они закроют весь его в один слой. Докажите следующие утверждения.

а) Если четырёхугольники подходят друг к другу, то у бумажного две противоположные стороны параллельны или диагонали перпендикулярны.

б) Если бумажный четырёхугольник — параллелограмм, то существует подходящий к нему картонный. *Н.Б.Васильев. Турнир городов весны 1889 года.* *Решение — в №3–1990*

1187. Для любого чётного m первые $(m-1)$ натуральных чисел можно выписать в таком порядке, чтобы никакая сумма нескольких подряд чисел не делилась на m. Докажите это. *Ф.Г.Шлейфер. Турнир городов весны 1889 года.* *Решение — в №3–1990*

1188. а) Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника, первый из которых можно поместить во второй, а второй — в третий.

б) Среди любых 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, есть 40 таких прямоугольников, что первый можно поместить во второй, второй — в третий, ..., 39-й — в 40-й.
Н.М.Седракян. Турнир городов весны 1889 года. *Решение — в №3–1990*

1189*. На плоскости дано n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0. *Д.В.Фомин. Турнир городов весны 1889 года.* *Решение — в №3–1990*

1190*. а) Если в таблице размером $2n \times 2n$ клеток стоят $3n$ звёздочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звёздочки будут вычеркнуты. Докажите это.

б) Расставьте в этой таблице $3n+1$ звёздочку так, что после вычёркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звёздочка.

К.П.Кохась. Турнир городов весны 1889 года. Решение — в №3–1990

1191. Пусть A_0, A_1, A_2, ... — последовательность точек плоскости. Начав с некоторой точки T_0, построим последовательность T_1, T_2, T_3, ..., где T_n — точка, симметричная T_{n-1} относительно точки A_n. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_0, A_1, A_2, ..., чтобы при любом выборе точки T_0 последовательность T_1, T_2, T_3, ... была периодической?

И.Ф.Акулич. Решение — в №4–1990

1192. Все рёбра многогранника равны между собой по длине и касаются некоторого шара.

а) Пусть одна из его граней имеет нечётное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг этого многогранника шар.

б) Обязательно ли в условиях пункта а) существует вписанный в этот многогранник шар?

в) Пусть все грани этого многогранника имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в него шар.

г) Обязательно ли при условиях пункта в) существует описанный шар?

В.А.Сендеров. Решение — в №4–1990

1193*. Докажите неравенство $ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z)$.

В.Кыртоаже (Румыния). Решение — в №4–1990

1194. Из точки M, расположенной внутри прямоугольника $ABCD$, проведены биссектрисы ME, MF, MG и MH треугольников AMB, BMC, CMD и DMA.

а) Докажите неравенства $\frac{3}{8}S_{ABCD} \leqslant S_{EFGH} \leqslant \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

б) Для каких точек M верно равенство $S_{ABCD}=2S_{EFGH}$?

А.А.Азамов, Е.Гольберг, В.Кыртоаже (Румыния), И.Егорова, одиннадцатиклассник Г.Хоцанян, А.Михайлов (Айзкраукле, Латвия). Решение — в №4–1990; доказательство более сильного утверждения — на странице 29 третьего номера 1991 года

1195. Последовательность x_1, x_2, x_3, ... такова, что для любых натуральных чисел m и n верно неравенство $|x_{m+n}-x_m-x_n| \leqslant \frac{1}{m+n}$. Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

О.Т.Ижболдин. Решение — в №4–1990

1196. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешено стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a+\frac{b}{2}$ и $b-\frac{a}{2}$. Докажите, что сколько бы таких операций ни сделать, исходный набор чисел не получим.

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская олимпада 1989 года. Решение — в №5–1990

1197. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O. Докажите, что если $AM+AN=CM+CN$, то $AO+AB=CO+CB$.

А.С.Меркурьев. Санкт-Петербургская олимпада 1989 года. Решение — в №5–1990

1198*. Назовём словом строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова считаем синонимами, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычёркиваем несколько подряд идущих цифр, сумма которых чётна, и на их место вписываем те же цифры, но в обратном порядке. Каково максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская олимпада 1989 года. Решение — в №5–1990

1199*. Если многочлен $ax^2 + (c - b)x + e - d$ имеет хотя бы один корень $x > 1$, то многочлен $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ имеет хотя бы один корень. Докажите это.

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская олимпиада 1989 года. *Решение — в №5–1990*

1200*. Для каких k можно расположить на окружности а) 10; б) 100; в) n дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?

С.А.Генкин. Санкт-Петербургская олимпиада 1989 года. *Решение — в №5–1990*

1990 год

1201. В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 округов с одинаковым числом избирателей. В Анчурии созданы три партии A, B, C, выдвигающие своих кандидатов. Партию A поддерживает всего 15% избирателей, B — 30%, C — 55%. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50% голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии A и B договорились поддерживать друг друга, а сторонники партии C голосуют за кандидата партии A. Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может попасть в парламент? *Н.Б.Васильев. Весенний Турнир городов 1989 года.* *Решение — в №6–1990*

1202. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM и DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.
Д.Нямсурен (Монголия) и В.Дубровский. Весенний Турнир городов 1989 года. *Решение — в №6–1990*

1203. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на а) 31; б*) 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м?
С.Л.Елисеев. Весенний Турнир городов 1989 года. *Решение — в №6–1990*

1204* На плоскости заданы точки A, B, C — центры трёх кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если длины AB, BC, CA — целые числа, то этот процесс периодический?

Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC а) равносторонний; б) равнобедренный; в) прямоугольный со сторонами 3, 4 и 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).
М.Хованов. Весенний Турнир городов 1989 года. *Решение — в №6–1990*

1205. Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то их следует раскрашивать в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам, если мальчик рисует только а) равносторонние треугольники; б) равнобедренные прямоугольные треугольники; в) одинаковые квадраты?
Г.В.Кондаков. *Решение — в №6–1990. Сравните с задачей М2098*

1206. В круге проведены перпендикулярные диаметры AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга. *А.Костенков и В.Дубровский.* *Решение — в №7–1990*

1207. Для любых чисел x, y и для любого натурального n докажите неравенство $\left(x^2+y^2\right)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m - y^m)^2$. *Ш.Рагимов.* *Решение — в №7–1990*

1208. Последовательность задана своим первым членом $h_1 = \frac{1}{2}$ и формулой $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Для любого натурального n докажите неравенство $h_1 + h_2 + \ldots + h_n < 1{,}03$. *И.Ф.Акулич.* *Решение — в №7–1990*

1209* Числовой треугольник, первая строка которого состоит из n единиц, а вторая — из $n-1$ целых чисел, обладает следующим свойством: $ac-bd = 1$ для любых четырёх чисел a, b, c и d, расположенных в вершинах ромба, точнее говоря, таких чисел, что a и c соседние в одной строке, причём c левее a, а числа b и d расположены соответственно строкой выше и строкой ниже, соседствуя по диагонали с числами a и c. Докажите, что

а) если все числа в треугольнике не равны 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике положительные, то в нём присутствует не менее $n/4$ различных чисел. *Д.В.Фомин.* Решение — в №7–1990

1210*. Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берёт из кучки или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке — у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если а) $k = 2$; б) $k = 5$? *К.П.Кохась.* Решение — в №7–1990

1211. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны? *А.В.Анджанс и Н.Б.Васильев. Осенний Турнир городов 1989 года.* Решение — в №8–1990. Статья Д.А.Терёшина «Обращение принципа Кавальери» второго номера 1994 года

1212. Множество всех целых чисел разбито на не пересекающиеся одна с другой арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, ... Может ли случиться, что $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \ldots < 0{,}9$, если множество прогрессий а) конечно; б) бесконечно?

А.К.Толпыго и Н.К.Константинов. Осенний Турнир городов 1989 года. Решение — в №8–1990

1213. а) Если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии. Докажите это.

б) Если выпуклый шестиугольник, каждая диагональ которого, соединяющая две противоположные его вершины, параллельна двум его сторонам, можно разрезать на n параллелограммов равной площади, то n делится на 3. Докажите это.

В.В.Произволов. Осенний Турнир городов 1989 года. Решение — в №8–1990

1214*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m > n$ столбцов расставлены звёздочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что найдётся такая звёздочка, что в её строке звёздочек больше, чем в её столбце. *А.А.Разборов и Н.Б.Васильев. Осенний Турнир городов 1989 года.* Решение — в №8–1990

1215*. Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трёх натуральных чисел так, что все 9 чисел различны: $15 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7$. Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из различных чисел. Докажите, что а) $k(n) > \frac{n}{6} - 1$; б) $k(n) < \frac{2n}{9}$; в) $k(100) = 21$; г) $k(500) = 110$.

Л.Д.Курляндчик. Осенний Турнир городов 1989 года. Решение — в №8–1990

1216. Найдите величины углов остроугольного треугольника ABC, если его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

К.Нистореску (Румыния) и В.Н.Дубровский. Решение — в №9–1990

1217. Для любого натурального n докажите равенство

$$\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1\right)^2 = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Ю.М.Бурман и Н.Б.Васильев. Решение — в №9–1990

1218. На отрезке AC взята точка B и построены лежащие в одной полуплоскости от прямой AC дуги AB и BC, сумма величин α и β которых равна 360°. Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L. Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.

Б. Михайлов (Болгария) и В.Н. Дубровский. *Решение — в №9–1990*

1219*. Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n > 1$, докажите неравенство

$$(s-x_1)^{x_1}+(s-x_2)^{x_2}+\ldots+(s-x_n)^{x_n} > n-1,$$

где $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

А. Михайлов. *Решение — в №9–1990*

1220*. Определим последовательность условиями $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$ и $b_{n+1} = b_{n-1} + b_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что для любого простого p число b_p делится на p.

Д.В. Фомин и Н.Б. Васильев. *Решение — в №9–1990*

1221. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведённая к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении $1:2$.

В.П. Чичин и В.В. Прасолов. *Решение — в №10–1990*

1222. Пусть m — натуральное число, $m > 1$, а s — наибольшее целое число, для которого $2^s \leqslant m$. Докажите, что а) из любых $s+1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и так расставить между ними знаки, каждый из которых — плюс или минус, что значение полученного выражения будет делиться на m; б) оценка в пункте а) неулучшаема, то есть существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них ни при какой расстановке знаков не делится на m.

В.Ф. Лев. *Решение — в №10–1990*

1223. На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Никакая прямая, параллельная сторонам листа, не пересекает более одной кляксы. Докажите, что сумма площадей клякс не больше a.

А.А. Разборов. *Решение — в №10–1990*

1224. Из вершины треугольника проведён отрезок в точку противоположной стороны, разделённый вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок быть а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?

В.А. Сендеров. *Решение — в №10–1990. Статья В.Н. Дубровского и В.А. Сендерова «Ловушка для треугольника» третьего номера 1999 года*

1225*. а) Если x, y и $z = \frac{x^2+y^2}{xy+1}$ — натуральные числа, то $z = 5$. Докажите это.

б) Уравнение $x^2 + y^2 = 5xy + 5$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Докажите это.

С. Мамиконян и Г. Оганесян. *Решение — в №10–1990 и в статье В.А. Сендерова и А.В. Спивака «Уравнения Пелля» четвёртого номера 2002 года*

1226. Если квадрат повернуть вокруг его центра на 45°, то полученный квадрат разделит стороны первоначального в некотором отношении. Возьмём произвольный выпуклый четырёхугольник, разделим его стороны в том же отношении и через точки деления проведём прямые, образующие новый четырёхугольник. Докажите, что площади этих четырёхугольников равны.

А.П. Савин. *Решение — в №11–1990*

1227. Назовём шахматный круговой турнир логичным, если для любых двух его участников выполнено следующее условие: тот, кто набрал не больше очков, тот не выиграл и в личной встрече. Докажите, что каким бы ни был турнир, то же самое распределение очков между участниками можно получить и в некотором логичном турнире. За победу в шахматной партии дают 1 очко, за ничью — 1/2, а за поражение — 0 очков.

А.В. Зелевинский и С.Ю. Оревков. *Решение — в №11–1990*

1228*. Для любых положительных чисел a, b и c, не превосходящих 1, докажите неравенство

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2.$$

Д.В.Фомин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №11–1990*

1229. Ни для какого натурального n не является квадратом число а) 4^n+5; б) 8^n+9; в*) a^n+a+1, где a — целое число, не кратное 8. Докажите это.
Р.Хайруллаев. *Решение — в №11–1990*

1230. В некоторых клетках квадратных таблицы размером 50×50 расставлены числа 1 и —1 таким образом, что абсолютная величина суммы всех чисел таблицы не превосходит 100. Докажите, что хотя бы для одного квадрата размером 25×25 абсолютная величина суммы его чисел не превосходит 25. *С.А.Генкин.* *Решение — в №11–1990*

1231. На какое наибольшее число частей могут разбить координатную плоскость графики n квадратных трёхчленов? Квадратный трёхчлен — функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — некоторые числа, $a\neq0$. *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №12–1990*

1232. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи: а) НОД$(p;q)=1$; б) НОД$(p;q)=d>1$.
Д.В.Фомин. *Решение — в №12–1990*

1233. Длина боковой стороны BC трапеции $ABCD$ равна длине её диагонали AC. Точка H — середина основания AB. Прямая l проходит через точку H и пересекает прямые AD и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме развёрнутый угол.
И.Ф.Шарыгин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №12–1990*

1234. Любой ли треугольник можно разбить на а) 7; б*) 5 подобных между собой треугольников? *А.Сойфер (США) и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №12–1990*

1235*. Пусть число $p=2q+1$ простое. Докажите, что число $2^{3q}q!-(-1)^q(2q-1)!!$ делится на а) p; б) p^2; в) p^3, если $p>3$. Здесь $(2q-1)!!$ — произведение первых q нечётных натуральных чисел. *И.З.Вайнштейн.* *Решение — в №12–1990*

1236. Найдите множество точек O внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром O, пересекающая стороны квадрата в 8 точках.
А.К.Толпыго. *Решение — в №1–1991*

1237. Точка O расположена внутри треугольника ABC и такова, что $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$, где K, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника. Докажите неравенство $\frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}$. *А.Магадаев.* *Решение — в №1–1991*

1238. Множество натуральных чисел разбито на два подмножества. В одном из них нет ни одной трёхчленной арифметической прогрессии. Обязательно ли в другом есть бесконечная арифметическая прогрессия? *А.Б.Скопенков.* *Решение — в №1–1991*

1239. Даны две пересекающиеся окружности и точка P. Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую AB так, чтобы угол APB имел заданную величину. *В.Н.Дубровский.* *Решение — в №1–1991*

1240*. На клетчатой бумаге со стороной клетки длины 1 выделен квадрат размером $n\times n$ клеток. Из одной его вершины в противоположную по линиям сетки проведём случайную ломаную длины $2n$. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставим n звёздочек. С какой вероятностью все звёздочки оказались по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звёздочек составляют такие, что звёздочки лежат по одну сторону от ломаной?)

Д.В.Фомин и С.В.Фомин. Решение — в №1–1991

1241. Имеется 1990 кучек, состоящих соответственно из 1, 2, 3, ..., 1990 камней. За один шаг разрешено выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Н.Х.Агаханов. XXIV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1991

1242. На сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взяты соответственно точки K и N так, что $\angle KEN = 90^\circ/n$, где E — вершина, противоположная вершине B. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.

Н.Х.Агаханов, Н.Ю.Нецветаев, Д.А.Терёшин и Д.В.Фомин. XXIV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1991

1243. а) На доске написано уравнение $*x^2 + *x = *$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звёздочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?

б) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x = *$. Вова называет любое число, Дима ставит его на место любой из звёздочек; Вова называет ещё одно число, Дима ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, Вова пишет любое число на место последней оставшейся звездочки. Может ли Вова добиться, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?

А.А.Берзиньш. XXIV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1991

1244. В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причём каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все трое дружат друг с другом, либо все трое враждуют между собой.

Д.В.Фомин. XXIV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1991

1245. На плоскости заданы точка O и n векторов, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке O, один за другим в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена в некотором угле величиной 60° с вершиной в точке O.

С.Августович и С.Севастьянов. XXIV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1991

1246. В любой бесконечной арифметической прогрессии, члены которой — натуральные числа, есть два числа с одинаковой суммой цифр. Докажите это.

С.А.Генкин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1990 года. Решение — в №3–1991

1247. Можно ли плоскость покрыть без наложений квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ..., используя квадрат каждого размера не более а) десяти раз; б) одного раза?

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1990 года. Решение — в №3–1991

1248. Отрезок I покрыт несколькими меньшими отрезками, ни один из которых не выходит за пределы отрезка I. Докажите, что

а) левые половины этих отрезков покрывают не менее половины отрезка I;

б) если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину — левую или правую,— по оставшиеся половины покроют не менее трети длины отрезка I.

Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1990 года. Решение — в №3–1991

1249. В королевстве $n > 6$ городов, каждые два их которых соединены одной дорогой с односторонним движением. Не из каждого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

а*) Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направление движения на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.

б) Верно ли это утверждение для $n = 6$?

И.Итенберг и Д.Фомин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1990 года. *Решение — в №3–1991*

1250.* Для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n докажите, что сумма $\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2}$ а) больше $\left(\sqrt{2}-1\right)n$; б) больше $5n/12$; в) не меньше $n/2$, если последовательность x_1, x_2, ..., x_n монотонна. *Л.Д.Курляндчик и А.Файбусович.* *Статья «История одного неравенства» четвёртого номера 1991 года. Комментарий — на странице 30 одиннадцатого номера 1991 года*

1251. На плоскости дан угол (меньше развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s, отрезающие от угла четырёхугольник наибольшей площади (P и Q — точки на сторонах угла, M — внутри угла).

В.А.Сендеров и Н.Б.Васильев. *Решение — в №4–1991*

1252. Пусть a и n — натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n.

φ — функция Эйлера, то есть $\varphi(k)$ — это количество несократимых правильных дробей со знаменателем k:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

К.П.Кохась. *Решение — в №4–1991*

1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников,— «карта» из нескольких «стран». Каждые два многоугольника или имеют общую сторону, или общую вершину, или вообще ни одной общей точки. Будем говорить, что такая карта реализуема в пространстве, если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — M, а проекции остальных граней на плоскости грани M — страны этой карты (все они лежат внутри M, но могут вырождаться в стороны многоугольника M).

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники;

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности. *С.Ю.Оревков.* *Разъяснение условия — в №4–1991. Решение — в №12–1991*

1254. Прямоугольник размером $m \times n$ можно разрезать на фигурки из четырёх клеток в форме буквы Г тогда и только тогда, когда mn делится на 8, причём $m > 1$ и $n > 1$. Докажите это.

Б.Д.Гинзбург, Д.В.Фомин, В.А.Дубровский и А.Скопенков. *Решение — в №4–1991*

1255. Если h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее из расстояний между его скрещивающимися рёбрами, то $\frac{1}{2} < \frac{d}{h} < \frac{3}{2}$. Докажите эти неравенства.

А.Б.Скопенков и В.Н.Дубровский *Решение — в №4–1991*

1256. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте такую трапецию, что каждая из окружностей касается трёх её сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.
В.А.Сендеров. *Решение — в №5–1991*

1257*. Коэффициенты многочлена f — целые числа. Для любого целого n число $f(n)$ делится хотя бы на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что существует такое натуральное k, что $k \leqslant m$ и $f(n)$ делится на a_k для любого целого n.
Д.В.Фомин. *Решение — в №5–1991. Исправление одного слова решения — на странице 31 шестого номера 1991 года*

1258*. Числа, расставленные по окружности, разрешено подвергать операциям замены тройки подряд идущих чисел x, y и z на тройку $x+y$, $-y$ и $y+z$ (именно в таком порядке).

а) Можно ли такими операциями из чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10, -1, -2, -3, ..., -9, -10 получить числа 10, 9, 8, ..., 2, 1, -10, -9, -8, ..., -2, -1?

б) Из любых расставленных по окружности n чисел, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел. Докажите это.
О.Ижболдин, Н.Васильев и Д.Фомин. *Исправление условия — на странице 30 третьего номера 1991 года. Решение — в №12–1991*

1259*. На окружности дано множество E, состоящее из $2n-1$ различных точек, где $n \geqslant 3$, из которых k точек покрашены в чёрный цвет, а все остальные — в белый. Раскраску точек называем хорошей, если существуют две чёрные точки, строго между которыми на одной из дуг содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение k, для которого каждая раскраска множества E является хорошей.
Международная олимпиада, 1990 год. *Решение — в №5–1991*

1260*. Для каких натуральных n число 2^n+1 делится на n^2?
Международная олимпиада, 1990 год. *Решение — в №5–1991*

1991 год

1261. На плоскости расположены 1991 точек — красных, чёрных и жёлтых, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками, причём из всех точек выходит поровну отрезков. Докажите существование красной точки, соединённой и с чёрной, и с жёлтой точками.

С.А.Генкин. Исправленное условие — в №6–1991. Решение — в №12–1991

1262. a, b, c — длины сторон треугольника; $x = |b - c|$, $y = |a - c|$, $z = |a - b|$ — абсолютные величины разностей длин его сторон, $p = (a + b + c)/2$ — его полупериметр. Докажите неравенство $xy + yz + zx \leqslant p^2$.

Л.Д.Курляндчик и Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1991

1263. Внутри окружности лежат ещё две окружности, касающиеся внешней окружности в точках A и B соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке AB, то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?

А.П.Веселов и В.Н.Дубровский. Решение — в №6–1991

1264*. На бесконечном листе белой клетчатой бумаги квадрат 2×2 нужно закрасить в чёрный цвет (а все остальные клетки должны остаться белыми). Можно ли это сделать несколькими операциями, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток квадрата 3×3 или 4×4?

И.Кан. Решение — в №6–1991

1265*. а) Среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встречается не более 12 раз. Докажите это.

б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

А.Акопян и Н.М.Седракян. Решение — в №6–1991

1266. Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечены 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите существование двух треугольников равной площади с вершинами в этих точках.

К.П.Кохась. Решение — в №7–1991

1267. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — некоторая перестановка первых n натуральных чисел, r_k — остаток от деления $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ на n. Докажите, что среди чисел r_1, r_2, ..., r_n по крайней мере $\sqrt{n}$ различных.

Л.Д.Курляндчик. Решение — в №7–1991. Исправление опечатки условия — на странице 29 четвёртого номера 1991 года

1268. Внутри треугольника ABC лежит точка X. Прямые AX, BX и CX пересекают стороны BC, AC и AB соответственно в точках A', B' и C'. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна $\sqrt{AB' \cdot AC' \cdot BC' \cdot BA' \cdot CA' \cdot CB'}/(2R)$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

А.Гирич, Н.Васильев и В.Прасолов. Решение — в №7–1991

1269. Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC и расположена на расстоянии AC от неё так, что внутри полосы, образованной прямыми p и AB, нет внутренних точек треугольника ABC. Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от неё так, что внутри полосы, образованной прямыми q и AC, нет внутренних точек треугольника ABC. Прямые p и q пересекаются в точке L. Докажите, что прямая AL делит отрезок BC пополам.

Я.Коваль. Решение — в №7–1991

1270. Если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то $12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ делится на 1991. Докажите это.

Н.Б.Васильев. Решение — в №7–1991

1271. Дана полуокружность с диаметром AB. Постройте хорду MN, параллельную AB, чтобы трапеция $AMNB$ была описанной.
В.А.Сендеров. *Решение — в №8–1991*

1272. Для любых n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right) \geqslant (n^2-1)^n .$$

Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №8–1991*

1273. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, как на основаниях, вне него построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1, у каждого из которых отношение высоты к основанию равно k. Такие же треугольники ABC_2, BCA_2 и CAB_2 построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади S, S_1 и S_2 треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ связаны равенством $S_1 \pm S_2 = S(1+12k^2)/2$, где знак зависит от ориентации треугольника $A_2B_2C_2$ по отношению к треугольнику ABC.)
Р.Сарбаш, А.Елизаров и Н.Васильев. *Решение — в №8–1991. Исправление условия — на странице 31 шестого номера 1991 года*

1274. Для любого натурального n абсолютная величина разности чисел

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}}$$

не превосходит $\dfrac{1}{n!(n-1)!}$. Докажите это.
Г.А.Гальперин. *Решение — в №8–1991*

1275*. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... натуральных чисел такова, что при любом натуральном n верно равенство $a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1$. Докажите, что при $n > 9$ число $a_n - 22$ составное.
С.А.Генкин. *Решение — в №8–1991*

1276. Для данной хорды MN окружности рассмотрим всевозможные треугольники ABC, основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN, а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN. Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.
Е.Куланин. *Решение — в №9–1991*

1277. Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}} \geqslant n\sqrt{2}.$$

Л.Д.Курляндчик и В.А.Сендеров. *Решение — в №9–1991*

1278. Сумма нескольких чисел равна 0, а сумма их квадратов равна 1. Докажите, что среди них есть два числа, произведение которых меньше или равно $-1/k$.
Е.Столов. *Решение — в №9–1991*

1279. На координатной плоскости расположены n квадратов, стороны которых параллельны осям координат. Любые два квадрата можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что можно пересечь одной прямой, параллельной одной из осей координат, не менее чем $n-2$ из данных квадратов.
А.В.Анджанс. *Решение — в №9–1991*

1280*. Период десятичного разложения дроби $1/3^{100}$ содержит а) не менее 20 одинаковых цифр подряд; б) последовательность цифр 123 456 789. Докажите это.

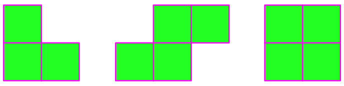
А.Коробов и Г.Рыбников. Решение — в №9–1991

1281. Если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4. Докажите это. *Н.Б.Васильев. Осенний Турнир городов 1990 года.* Решение — в №10–1991

1282. Не существует двух таких (отличных от параллелограмма) трапеций, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой. Докажите это.

В.В.Произволов. Осенний Турнир городов 1990 года. Решение — в №10–1991

1283. Квадрат 99×99 разбит на фигурки трёх типов, изображённые на рисунке.



а) Количество фигурок первого типа не меньше 199. Докажите это.

б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа 199 штук.

Д.В.Фомин. Решение — в №10–1991

1284. На основании AB равнобедренного треугольника ACB выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD, имеет тот же радиус, что и вневписанная окружность треугольника ACD (то есть окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

И.Ф.Шарыгин. Осенний Турнир городов 1990 года. Решение — в №10–1991

1285. Имеется колода из n карт. Разрешено взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или конец). Пусть $M(n)$ — наименьшее количество операций, необходимое, чтобы расположить карты в обратном порядке. Докажите, что а) $M(9)\leqslant 5$; б) $M(52)\leqslant 26$; в) $M(52)\geqslant 17$; г*) $M(52)\geqslant 26$. д) Найдите $M(n)$ для любого натурального n.

Г.Воронин. Осенний Турнир городов 1990 года. Решение — в №10–1991

1286. На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50-ти двухместных номерах гостиницы так, что живущие в одном номере могли бы разговаривать между собой. *Д.Фомин. Санкт-Петербург, 1968-1971 годы.* Решение — в №11–1991

1287. Длина диагонали AC параллелограмма $ABCD$ больше длины диагонали BD. Точка M диагонали AC такова, что около четырёхугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

Д.Фомин. Санкт-Петербург, 1968-1971 годы. Решение — в №11–1991

1288*. Число $235^2+972^2=1\,000\,009$ — составное. Докажите это.

Д.Фомин и Н.Васильев. Санкт-Петербург, 1968-1971 годы. Решение — в №11–1991. Статья В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» третьего номера 1999 года

1289*. Сумма целых чисел a_1, a_2, ..., a_n равна 1. Для каждого натурального числа $k\leqslant n$ обозначим через N_k количество положительных среди чисел a_k, a_k+a_{k+1}, ..., $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+a_1+\ldots+a_{k-1}$. Докажите, что все числа N_1, N_2, ..., N_n различны. *Н.Васильев. Санкт-Петербург, 1968-1971 годы.* Решение — в №11–1991

1290*. Квадратный лист бумаги размера 8×8 разграфили на единичные клетки и произвольным образом сложили в книжку 1×1 (из 64 листов). Листы книги пронумеровали по порядку числами от 1 до 64, а затем вновь развернули. Пусть p — наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково

наименьшее возможное значение p и при каком складывании книжки оно достигается?
Н.Васильев. М.Гусаров. Решение — в №11–1991

1291. В правильном а) 12-угольнике; б) 54-угольнике существуют четыре диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке. Докажите это.
С.И.Токарев. Решение — в №1–1992

1292. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором так указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, чтобы общая сумма расходов не превысила заранее заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утверждённых расходов не превысит S?
И.Н.Сергеев. Решение — в №1–1992

1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.
И.Ф.Шарыгин. Решение — в №1–1992

1294. Куб размером $10\times10\times10$ сложен из 500 чёрных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие один к другому гранями, разного цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times1\times10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать одного кубика. Докажите, что число вынутых чёрных кубиков делится на 4.
А.В.Спивак. Решение — в №2–1992

1295. На прямоугольном экране размером $m\times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в некоторый момент в каком-нибудь квадрате размером 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвёртая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.
А.А.Часовских. Решение — в №2–1992

1296. Из многоугольника разрешено получать новый следующим образом: разрезав по отрезку на две части, одну из них перевернуть и, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза, склеить части по линии разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?
И.В.Воронович. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1992

1297. Числа α и β удовлетворяют равенствам $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1$ и $\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$. Найдите $\alpha+\beta$.
Б.Кукушкин. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1992

1298. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участник лотереи во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считают билет, у которого хотя бы в одной клетке записано число, которое записано в соответствующей клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?
А.А.Берзиньш. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1992

1299. На доске выписано несколько чисел. Разрешено стереть любые два из них и записать на доску вместо них одно число — половину их среднего арифметического. Докажите, что если изначально на доске написано n единиц и вышеописанную операцию выполнили $n-1$ раз, то на доске осталось число, не меньшее $1/n$.
С.Берлов. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1992

1300. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придётся задать не более 91 вопросов. Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный ответ (но может быть, что все ответы верные).

А.В.Анджанс, И.Соловьёв и В.Слитинский. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №2–1992

1301. Обязательно ли тетраэдр правильный, если равны друг другу а) пять двугранных углов; б) восемь плоских углов?

в) Обязательно ли пирамида $ABCD$ правильная, если её основание ABC — правильный треугольник, а три плоских угла при вершине D равны друг другу?

В.А.Сендеров и Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1992

1302. Для любого натурального n произведение многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен ненулевой степени имеет не менее n отличных от нуля коэффициентов. Докажите это.

Г.Карнаух и А.П.Савин. Решение — в №3–1992

1303. Найдите все такие бесконечные последовательности натуральных чисел q_1, q_2, q_3, ..., что для любого натурального n верно равенство $q_{n+3}q_{n+1} = q_n + q_{n+2}$.

О.Алиев, С.Елисеев и У.Нуриев. Решение — в №3–1992

1304. I — центр вписанной окружности треугольника ABC, R — радиус его описанной окружности. Докажите неравенство $R^3 \geqslant IA \cdot IB \cdot IC$.

А.Соловьёв, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Решение — в №3–1992

1305. Дано $2n$ различных чисел a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n. Таблица размером $n \times n$ заполнена по следующему правилу: на пересечении j-й строки и k-го столбца написано число $a_j + b_k$. Для каждого столбца таблицы подсчитаем произведение всех n его чисел. Докажите, что если все полученные произведения равны, то, посчитав для каждой строки произведение всех n её чисел, тоже получим равные произведения.

Д.В.Фомин. XXV Всесоюзная олимпиада. Решение — в №3–1992

1306. Назовём вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника G, вписанного в прямоугольник F (так, что вершины G лежат по одной на сторонах F), не меньше вытянутости F.

И.Ф.Акулич. Решение — в №4–1992

1307. Для любого натурального n число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ имеет не меньше n различных простых делителей. Докажите это.

Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Решение — в №4–1992

1308. На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трёх прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.

А.П.Савин. Решение — в №4–1992

1309. На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определим множество $H_1(M)$ середин отрезков, соединяющих точку M с вершинами треугольника. Каждое следующее множество H_{k+1}, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, определим как множество середин отрезков, один из концов каждого из которых принадлежит $H_k(M)$, а другой является вершиной исходного треугольника. Докажите, что для любого положительного числа ε существует фигура F, площадь которой меньше ε, а для любой точки M существует такое натуральное число n, что все фигуры $H_n(M)$, $H_{n+1}(M)$, $H_{n+2}(M)$, ... содержатся в фигуре F.

А.Я.Канель–Белов и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1992

1310*. Соревнуются 2^k боксёров, где $k > 1$. Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксёров: каждый проводит один бой. Все боксёры имеют разную силу, в каждом бою побеждает сильнейший. Расписание на каждый день составляют накануне вечером и в течение дня не меняют. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксёра. Было бы интересно определить места менее чем за $k(k+1)/2$ дней; точная оценка неизвестна. *А.В.Анджанс, В.О.Бугаенко и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №12–1992*

1311. Длины a, b и c сторон треугольника — целые числа, причём длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $a^2+b^2+c^2$ — квадрат целого числа. *Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1991 года.* *Решение — в №5–1992*

1312*. Поля доски размером $n \times n$ раскрашены в синий, белый и красный цвета. С каждой синей клеткой граничит по стороне хотя бы одна белая, с каждой белой — красная, а с красной — синяя. Докажите, что красных клеток а) не более $2n^2/3$; б) не менее $n^2/11$. *Ф.Л.Назаров. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1991 года.* *Решение — в №5–1992*

1313. Придумайте такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_8, что

$$\sqrt{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1-1}}+\sqrt{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_2-1}}+\ldots+\sqrt{\sqrt{a_8}-\sqrt{a_8-1}}=2.$$

Л.Д.Курляндчик. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1991 года. *Решение — в №5–1992*

1314. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABM и CDM соответственно. Докажите неравенство $AB+CD \leqslant 4PQ$.
Ф.Л.Назаров. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1991 года. *Решение — в №5–1992*

1315. На окружности расставлены целые числа. Разрешено стереть любое чётное число, а вместо двух соседних с ним чисел записать их сумму (отчего количество чисел уменьшается на 2). Такие операции выполняют, пока это возможно, то есть пока либо не останется ни одного чётного числа, либо останется одно или два числа. Докажите, что количество оставшихся чисел зависит лишь от исходной расстановки, но не от порядка действий.
Д.В.Фомин. Санкт-Петербургская городская олимпиада 1991 года. *Решение — в №5–1992*

1316. Арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифры c, состоит не более чем из а) 72 чисел при $c \neq 0$; б) 80 чисел при $c = 0$. Докажите эти оценки и выясните, достигаются ли они. *С.И.Токарев.* *Решение — в №6–1992*

1317. Для любого треугольника ABC докажите неравенства

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_a l_b l_c} < \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_a, l_b, l_c — длины биссектрис треугольника ABC. *А.Б.Скопенков.*
Международная олимпиада, 1991 год. *Решение — в №6–1992 и в статье М.Горелова «О пользе графиков» третьего номера 2010 года*

1318. Дан связный граф с n рёбрами. Докажите, что его рёбра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух рёбер, стоящие на этих рёбрах числа не имеют общего делителя, большего 1. Граф — это система точек, некоторые пары которых соединены рёбрами. Граф называют связным, если по его рёбрам можно из любой вершины пройти в любую другую.
В.Вавилов и А.Фомин. Международная олимпиада, 1991 год. *Решение — в №6–1992*

1319. Точка M расположена внутри треугольника ABC. Докажите, что величина хотя бы одного из углов MAB, MBC и MCA не превосходит 30°.

В.А.Сендеров. Международная олимпиада, 1991 год. *Решение — в №6–1992*

1320*. Постройте такую бесконечную последовательность x_1, x_2, x_3, $\ldots$, что для любых натуральных чисел m и n, где $m \neq n$, верно неравенство $\left|x_m - x_n\right| \geqslant \frac{1}{|m-n|}$.

В.Вавилов и А.Фомин. Международная олимпиада, 1991 год. *Решение — в №6–1992 и в статье А.В.Спивака «Уравнения Пелля» шестого номера 2002 года. Задача совпадает с задачей М514*

1992 год

1321. Ладья побывала во всех клетках доски размером $n \times n$ клеток. Докажите, что она изменила направление своего движения не менее $2n - 2$ раз. (Ладья движется параллельно одной из сторон квадрата.) *Десятиклассник Ю.Ходзинский.* *Решение — в №7–1992*

1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M, делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC правильный, если M — точка пересечения а) медиан; б) высот; в) биссектрис; г) M — произвольная точка внутри треугольника? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №7–1992*

1323. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство $x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} \geqslant x + y$. *В.В.Прасолов.* *Решение — в №7–1992*

1324. Ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится а) ни на 5, ни на 11, ни на 17; б) ни на какое число вида $6m - 1$, где $m \in \mathbb{N}$. Докажите это. *С.Масич.* *Решение — в №7–1992*

1325. а) O — центр тяжести треугольника ABC, то есть точка пересечения его медиан. Обозначим $P = R_O^{120^\circ}(B)$ и $Q = R_O^{240^\circ}(C)$. Докажите равенства $AP = PQ = QA$.

б*) Для произвольных точек A_1, A_2, ..., A_n, где $n > 1$, рассмотрим следующую операцию. Сначала ищем их центр тяжести O, затем каждую точку A_k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, заменяем на $A'_k = R_O^{2\pi k/n}(A_k)$. С полученными точками A'_1, A'_2, ..., A'_n проделываем ту же операцию, и так далее. Докажите, что после $n - 1$ таких операций получим набор совпадающих точек. *В.Быковский.* *Решение — в №7–1992*

1326. Последовательность задана своим начальным членом $a_0 = 9$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$. Докажите, что десятичная запись числа a_{10} содержит более 1 000 девяток. *М.Н.Вялый.* *Решение — в №8–1992*

1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. При этом повороте точка B перешла в точку D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу. *З.Насыров.* *Решение — в №8–1992*

1328. Числа x_1, x_2, ..., x_n лежат на отрезке $[-1; 1]$, причём сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$. *Ф.Л.Назаров.* *Решение — в №8–1992*

1329. Прямые, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда площади треугольников ACE и BDF равны. Докажите это. *Н.М.Седракян.* *Решение — в №8–1992*

1330. На плоскости проведены n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в*) $n-2$ треугольников.

Д.В.Фомин. *Решение — в статье А.Канеля и А.Ковальджи «Треугольники и катастрофы» одиннадцатого номера 1992 года.*

1331. Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число рёбер этих тетраэдров придётся разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным рёбрам в один правильный октаэдр? *Б.Бегун.* *Решение — в №9–1992*

1332. Отрезки AK, BM, CN и DL делят квадрат $ABCD$ со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырёхугольников, площадь центрального из которых равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Докажите равенство $AL + BK + CM + DN = 2$. *С.Сефибеков.* *Решение — в №9–1992*

1333. Если a, b и c — длины сторон треугольника, то $a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c)\geqslant 9abc$. Докажите это.

Г.Алиханов, Л.Курляндчик и В.А.Сендеров. *Решение — в №9–1992*

1334. Можно ли числа 1, 2, ..., 10 разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11? *И.З.Вайнштейн.* *Решение — в №9–1992*

1335. n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом никакую шоколадку нельзя разломить более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m=9$?

б) При каких m и n это возможно?

Ю.Чеканов, Д.Бугаенко и Н.Константинов. *Решение — в №9–1992*

1336. Для любых натуральных чисел m и n докажите неравенство $\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1$.

Л.Д.Курляндчик и В.А.Сендеров. *Решение — в №10–1992*

1337. Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через некоторую точку фигуры проведены параллельно этим осям прямые, которые разделили фигуру на 8 частей, раскрашенных поочерёдно в голубой и розовый цвета. Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых частей. *В.В.Произволов.* *Решение — в №10–1992*

1338. Укажите способ вычисления 2^n-го числа последовательности Фибоначчи не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания. *В.Быковский.* *Решение — в №10–1992*

1339. S — площадь треугольника ABC, величина угла ACB равна γ, а длина биссектрисы, проведённой из вершины C, равна l.

а) Докажите неравенство $S\leqslant l^2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

б) Для каких треугольников достигается равенство? *Н.Немировская.* *Решение — в №10–1992*

1340. На красной окружности произвольным образом отмечены $n>4$ различных синих точек. Начав с какой-нибудь из них, будем перекрашивать каждую вторую (по часовой стрелке) синюю точку в красный цвет, соединяя её хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и так далее, пока на окружности есть синие точки. На сколько частей распадётся круг при разрезании по всем проведённым линиям, если а) $n=32$; б) $n=1992$? *С.А.Дориченко.* *Решение — в №10–1992*

1341. Сравните между собой числа а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$ и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$; б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$ и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$, где m, n, k — натуральные числа, $m>n$, а в каждом из выражений — k знаков корня.

Л.Д.Курляндчик и В.А.Сендеров. *Решение — в №11–1992*

1342. Напишем строку из первых n натуральных чисел. Под ней напишем строку из n чисел по следующему правилу: сначала — числа, стоящие в первой строке на нечётных местах (по порядку), а затем числа, стоящие на чётных местах (тоже по порядку). Далее будем писать следующие строки по тому же правилу до тех пор, пока на некотором шаге не получится m-я строка, совпадающая с первоначальной. Докажите, что такая строка встретится, причём $m<n$. *Я.Брискин.* *Решение — в №11–1992*

1343. Три хорды окружности ω попарно пересекаются в точках A, B и C. Построим ещё три окружности: одна касается сторон угла CAB и (изнутри) окружности ω в точке A_1, вторая — сторон угла ABC и (изнутри) окружности ω в точке B_1, третья — сторон угла ACB и (опять-таки изнутри) окружности ω в точке C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. *И.Ф.Шарыгин.* *Решение — в №11–1992*

1344. Том Сойер красит забор, состоящий из бесконечной последовательности прямоугольных досок разной высоты и ширины. Каждая доска на 1% уже, чем предыдущая, и выше предыдущей, однако не выше 2 метров. Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2%, красит её, а в противном случае — пропускает. Может ли забор быть таким, что Том покрасит не менее а) 40%; б) 50%; в) 60% площади забора? *А.А.Григорян.* Решение — в №3/4–1992

1345. На гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$, взяты две точки M и N, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Докажите, что эти точки — вершины равностороннего треугольника. *В.А.Сендеров.* Решение — в №11–1992

1346. Внутри окружности радиуса 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) 51-звенная ломаная, причём длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше утроенной площади правильного треугольника, вписанного в данную окружность. *А.Берзиньш и Н.Константинов.* Решение — в №12–1992

1347. Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по массе, и 101 золотая монета, также упорядоченные по массе. Массы всех монет различные. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про любые две монеты установить, какая тяжелее. За наименьшее число взвешиваний найдите монету, занимающую по массе 101-е место. (Укажите его и докажите, что меньшим число взвешиваний обойтись нельзя.) *А.В.Анджанс, Г.В.Кондаков и Н.К.Константинов.* Решение — в №12–1992

1348. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Стороны $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ треугольника $A'B'C'$ параллельны, соответственно, отрезкам PA, PB и PC. Через точки A', B' и C' проведены прямые, параллельные соответственно прямым BC, CA и AB. Докажите, что эти прямые пересекаются на описанной окружности треугольника $A'B'C'$. *В.В.Прасолов и Н.Б.Васильев.* Решение — в №12–1992

1349*. Круг разбит на несколько секторов. В некоторых из них стоят фишки; фишек на 1 больше, чем секторов. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берём какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляем в разные стороны в соседние сектора. Докажите, что после нескольких таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.
Д.В.Фомин, Н.К.Константинов и Н.Б.Васильев. Решение — в №12–1992

1350*. Пусть a и b — натуральные числа. Через $V(n,b)$ обозначим количество разложений числа n в произведение одного или нескольких натуральных сомножителей, каждый из который больше b. (Например, $36 = 6\cdot 6 = 4\cdot 9 = 3\cdot 3\cdot 4 = 3\cdot 12$, так что $V(36,2) = 5$.) Докажите неравенство $bV(n,b) < n$. *Н.Б.Васильев.* Решение — в №12–1992

1351. AC и BC — катеты прямоугольного треугольника ABC, причём $AC > BC$. На катете AC выбрана точка E, а на гипотенузе AB — точка D так, что $BC = CE = BD$. Докажите, что треугольник CDE прямоугольный в том и только том случае, когда длины сторон треугольника ABC относятся как $3:4:5$.
А.Паровян и Н.К.Константинов. Решение — в №12–1992

1352. Назовём числа a_1, a_2, …, a_n, где $n > 2$, близкими, если каждое из них меньше, чем сумма остальных, делённая на $n-1$. Докажите неравенства а) $a_1 > 0$; б) $a_1 + a_2 > a_3$; в) $(n-1)(a_1+a_2) \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Ф.Г.Шлейфер и Н.К.Константинов. Решение — в №12–1992

1353. Таблицу размером $n \times n$ заполним числами по следующему правилу: в клетке, стоящей на пересечении k-й строки и j-го столбца, записано число $1/(k+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1. *С.Иванов и Г.В.Кондаков.* Решение — в №12–1992

1354. Центры тяжести (то есть точки пересечения медиан) треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ лежат на одной прямой. Рассмотрим все 27 треугольников вида $A_jB_kC_m$, где j, k и m независимо пробегают значения 1, 2 и 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на два множества так, что сумма площадей первого множества будет равна сумме площадей треугольников второго множества.
А.В.Анджанс и Н.Б.Васильев. *Решение — в №12–1992*

1355. Если число $a = 2^{2k} + 2^k + 1$ не является делителем числа $2^{2^k+1} - 1$, то a — составное. Докажите это. *Г.Карнаух, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров.* *Решение — в №1/2–1993*

1356. Если $abc = 4Rrr_c$, где a, b, c — длины сторон треугольника ABC, R, r и r_c — радиусы описанной, вписанной и вневписанной окружностей (касающейся стороны длины AB и продолжений сторон длин CA и CB), то $\angle ACB = 90^\circ$. Докажите это. *Одиннадцатиклассник В.Турешбаев.* *Решение — в №1/2–1993*

1357. Числа $91! \cdot 1901! - 1$ и $92! \cdot 1900! + 1$ делятся на 1993. Докажите это.
Ю.Калиниченко. *Решение — в №1/2–1993*

1358. Назовём кубоидом шестигранник, все грани которого — четырёхугольники. Докажите, что если три из четырёх его диагоналей (не лежащих на его гранях) пересекаются в одной точке, то и четвёртая проходит через эту точку.
В.Н.Дубровский. *Решение — в №1/2–1993*

1359. Пусть $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Докажите, что уравнение $a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx = 0$ на отрезке $[0; \pi]$ имеет а) хотя бы один корень; б*) ровно n корней.
А.Я.Канель и В.А.Сендеров. *Решение — в №1/2–1993*

1360*. Обозначим через $p(m,n)$ количество различных покрытий доски размерами $m \times n$ клеток $mn/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2; разумеется, мы считаем одно из чисел m и n чётным).

а) $p(2,n) = \varphi_n$ — число Фибоначчи. Докажите это.

б) Для любого чётного n докажите неравенства $(3/2)^{n^2/2} < p(n,n) < 2^{n^2/2}$.
А.Китбалян. *Решение — в №1/2–1993*

1361. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD. В треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а высоту CD — в точке K. Докажите, что

а) треугольники CMN и ABC подобны;

б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K, радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC. *Э.Г.Готман.* *Решение — в №3/4–1993*

1362. Если натуральное число a взаимно просто с 10, то для любого натурального M существует такое n, что сумма цифр десятичной записи числа a^n больше M. Докажите это. (Другими словами, докажите, что последовательность сумм цифр степеней числа a не ограничена.) *С.Керопян.* *Решение — в №3/4–1993*

1363. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза, если а) $n = 5$; б) $n = 4$; в) n — произвольное натуральное число?
С.И.Токарев. Московская математическая олимпиада 1992 года. *Решение — в №3/4–1993*

1364. a, b, c — неотрицательные числа, $a + b + c = 1$. Докажите неравенства

а) $4a^3 + 4b^3 + 4d^3 + 15abc \geqslant 1$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 + abc \geqslant \min\{\frac{1}{4}; \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\}$. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №3/4–1993*

1365. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с чётным числом сторон. Обязательно ли его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну рёбер разных цветов?

С.И.Токарев. Московская математическая олимпиада 1992 года. Решение — в №3/4–1993

1366. Точки M и n — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, сторона BC которого параллельна диагонали AD, а сторона AE — диагонали BD. Обозначим точку пересечения отрезков BN и AM буквой O. Докажите равенство площадей четырёхугольника $MDNO$ и треугольника ABO.

Б.Кукушкин. Всероссийская олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1367. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причём первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и так далее (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому ни из какого города ни одна авиакомпания не может осуществлять более одного рейса. Компании решили перераспределить между собой рейсы так, чтобы всем досталось поровну рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушив закона. *Б.Кукушкин. Всероссийская олимпиада, 1992 год.* Решение — в №9/10–1993

1368. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Точки O, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABD и ACD соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности.

б) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся её серединой. O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам.

Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Всероссийская олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1369. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}=c-zx; \\ \dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}=a-xy; \\ \dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{y}=b-yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры.

Б.Кукушкин. Всероссийская олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1370. Рассматриваем наборы из n гирек разных масс. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

Н.Б.Васильев. Всероссийская олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1371. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

В.В.Произволов и Б.Кукушкин. Межреспубликанская олимпиада 1992 года. Решение — в №9/10–1993

1372. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого уравнения третьей степени. Придумайте, как с помощью этого прибора для любого многочлена P третьей степени решить систему уравнений $x=P(y)$, $y=P(x)$.

Д.Туляков. Межреспубликанская олимпиада 1992 года. Решение — в №9/10–1993

1373. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, причём радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проведём произвольную плоскость γ. Она пересечёт окружность в некоторых точках X и Y. Докажите, что произведение длин отрезков BX и BY не зависит от выбора плоскости γ.

Б. Чиник. Межреспубликанская олимпиада 1992 года. Решение — в №9/10–1993

1374. Найдите все натуральные числа k, отличные от 1, удовлетворяющие следующему условию: для некоторых не равных одно другому натуральных чисел m и n десятичная запись числа k^m+1 получается из десятичной записи числа k^n+1 перестановкой цифр в обратном порядке.

А.Б. Скопенков. Межреспубликанская олимпиада 1992 года. Решение — в №9/10–1993

1375. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были на разные места. Оказалось, что зрителей можно так рассадить в зале, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее число зрителей можно заведомо рассадить на свои места с сохранением условия для всех остальных?

Е. Малинникова. Межреспубликанская олимпиада 1992 года. Решение — в №9/10–1993

1376. В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть окрашен в синий или красный цвет, а может остаться незакрашенным. Найдите такое наименьшее n, что при любом закрашивании любых n отрезков найдётся треугольник, все стороны которого одного цвета.

Б. Кукушкин. XXXIII международная олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1377. На плоскости даны: окружность, касающаяся её прямая l и точка M на прямой l. Найдите множество всех точек P, удовлетворяющих следующему условию: существуют такие две точки Q и R на прямой l, что M — середина отрезка QR, а исходная окружность вписана в треугольник PQR.

Б. Кукушкин. XXXIII международная олимпиада, 1992 год. Решение — в №9/10–1993

1378*. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства, S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — ортогональные проекции множества S на плоскости Oxy, Oyz и Oxz соответственно. Докажите неравенство $|S|^2 \leqslant |S_{xy}|\cdot|S_{yz}|\cdot|S_{xz}|$.

Через $|A|$ обозначаем количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. *Б. Кукушкин. XXXIII международная олимпиада, 1992 год.* Решение — в №9/10–1993

1379. Для любого натурального числа n через $S(n)$ обозначим такое наибольшее натуральное число, что для любого натурального числа k, не превосходящего $S(n)$, число n^2 представимо в виде суммы k квадратов натуральных чисел.

а) Для любого $n>3$ докажите неравенство $S(n)<n^2-13$.

б*) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что $S(n)=n^2-14$.

в) Существует бесконечно много таких натуральных n, что $S(n)=n^2-14$. Докажите это. *Б. Кукушкин. XXXIII международная олимпиада, 1992 год.* Решение — в №9/10–1993

1380*. Число $\left(5^{125}-1\right):\left(5^{25}-1\right)$ не простое, а составное. Докажите это.

Б. Кукушкин. XXXIII международная олимпиада, 1992 год, материалы жюри. Решение — в №9/10–1993

1993 год

1381. Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой $2n$-звенной ломаной с вершинами во всех этих точках есть хотя бы два параллельных звена.
В.В.Произволов. Решение — в №11/12–1993

1382. Все точки плоскости произвольным образом раскрашены в два цвета — чёрный и белый. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение величин углов которого равно а) $1:2:3$; б) $1:2:4$.
А.Сойфер (Колорадо-Спрингс, США). Решение — в №11/12–1993

1383. Наименьшее из данных n чисел равно m, наибольшее — M, а сумма равна 0. Докажите, что

а) сумма квадратов этих n чисел не превосходит $-nmM$;

б) сумма четвёртых степеней этих n чисел не превосходит $-nmM(M^2+Mm+m^2)$.
Л.Туцеску (Крайова, Румыния), Н.Васильев и В.Сендеров. Решение — в №11/12–1993

1384*. ABC — неравнобедренный остроугольный треугольник; O и I — центры описанной и вписанной окружностей, H — ортоцентр. Докажите, что четырёхугольники $AOIH$, $BOIH$ и $COIH$ невырожденные, причём среди них ровно два выпуклых.
В.А.Сендеров. Решение — в №1/2–1993

1385*. ABC — произвольный треугольник. а) Для любого равностороннего треугольника XYZ докажите неравенство

$$AX^2+BY^2+CZ^2 \leqslant \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}S_{ABC}.$$

б) Докажите существование равностороннего треугольника XYZ, для которого неравенство пункта а) обращается в равенство.
В.Быковский. Решение — в №11/12–1993

1386. Клетки квадрата 7×7 раскрашены в два цвета. Докажите, что найдётся по крайней мере 21 прямоугольник с вершинами в центрах клеток одного цвета и со сторонами, параллельными сторонам квадрата.
И.С.Рубанов. Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 год. Решение — в №1–1994

1387. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B. Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что $OC=CD=1$. Луч OX и отрезок AB пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка OM.
Д.В.Фомин и Н.Б.Васильев. Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 год. Решение — в №1–1994

1388. Даны различные квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(1)+f(10)+f(100)=g(1)+g(10)+g(100)$. Укажите такое x, чтобы было выполнено равенство $f(x)=f(x)$.
А.Перлин. Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 год. Решение — в №1–1994

1389. Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причём каждый рядовой подчинён одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.
А.Перлин. Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 год. Решение — в №1–1994

1390*. На плоскости расположены несколько кругов одного и того же радиуса. Можно ли отметить несколько точек так, чтобы внутри каждого круга находилась ровно одна отмеченная точка?
Д.В.Фомин и В.Н.Дубровский. Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 год. Решение — в №1–1994

1391. а) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1; точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Докажите аналогичное утверждение, если A_1BC, AB_1C и ABC_1 — подобные равнобедренные треугольники (с основаниями AB, BC и CA соответственно).

Н.Седракян и С.Ткачёв. Решение — в №2–1994

1392. На плоскости задан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 1$. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются следующим преобразованиям (сохраняющим длины отрезков AB, CD и AD). Новое положение точки A получается из старого симметрией относительно прямой BD, затем новое положение точки D получается из старого симметрией относительно прямой AC (где A уже занимает новое положение), затем опять A отражается относительно BD (точка D уже новая), затем вновь отражается D, и так далее. Докажите, что после нескольких отражений положение всех точек совпадёт с первоначальным.

М.Л.Концевич и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1994

1393*. В таблице m строк и n столбцов. «Горизонтальным ходом» называем перестановку элементов таблицы, при которой каждый элемент остаётся в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяем «вертикальный ход» («строка» в предыдущем определении заменяется на «столбец»). Укажите такое k, что за k ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов матрицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.

А.В.Анджанс, Н.Н.Константинов и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1994. Статья М.И.Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» четвёртого номера 1970 года

1394*. Количество рёбер многогранника равно 100. а) Какое наибольшее число рёбер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?

Докажите, что для невыпуклого многогранника это число б) может быть больше 96; в) не может равняться 100.

А.В.Анджанс и Н.Б.Васильев. Решение — в №2–1994

1395. Назовём человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовём человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

Ф.Л.Назаров. Решение — в №2—1994

1396. Для любых положительных чисел a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n сумма всех n чисел вида $a_kb_k/(a_k+b_k)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, не превосходит величины $AB/(A+B)$, где $A = a_1+a_2+\ldots+a_n$ и $B = b_1+b_2+\ldots+b_n$. Докажите это.

С.Драгомир, Ш.Арсланажич, А.А.Егоров и В.А.Сендеров. Решение — в №2–1994

1397*. По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муравей (таким образом, муравьёв столько же, сколько граней), и все они движутся, обходя каждый свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч. Докажите, что рано или поздно какие-то два муравья столкнутся.

А.Клячко. Решение — в №2–1994

1398. На множестве M всех натуральных чисел, не превосходящих числа 1993, определена операция $*$, которая по каждым двум числам a и b даёт некоторое число $a*b$, также принадлежащее множеству M. Для любых двух чисел a и b множества M выполнено равенство $(a*b)*a = b$. Докажите существование такого числа a, что $a*a = a$.

Ф.Л.Назаров. Решение — в №2–1994

1399. Каким может быть наименьший период суммы двух бесконечных периодических дробей, наименьшие периоды которых равны а) 6 и 12; б) 12 и 20?

С.Б.Гашков. Статья «Легко ли складывать и умножать дроби?» третьего номера 1994 года

1400*. Внутри правильного тетраэдра с ребром a летает муха. Какой наименьший замкнутый путь должна она пролететь, чтобы побывать на всех гранях тетраэдра?

И.Ф.Шарыгин. Решение — в №2–1994

1401. На не содержащей точку A дуге BC описанной окружности треугольника ABC взята точка K. Пусть NK и MK — биссектрисы треугольников AKB и AKC. Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

В.Акопян, Н.Б.Васильев, В.Н.Дубровский и В.А.Сендеров. Решение — в №3–1994

1402. Для любой неубывающей последовательности x_1, x_2, ..., x_n положительных чисел, где $n > 2$, докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1} \geqslant \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}.$$

Л.Д.Курляндчик, А.Мельцер и Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1994

1403. Каждую сторону выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, где $n > 4$, продлим на её длину: таким образом получаем n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$, где $\overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \overrightarrow{A_{k+1}B_{k+1}}$ для каждого $k = 1$, 2, ..., $n-1$. Докажите, что площадь полученного многоугольника не более чем в 5 раз больше площади исходного многоугольника.

Э.А.Ясиновый и Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1994

1404. Числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x+y+z=0$ и $xyz=2$. Найдите наибольшее возможное значение величины $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}$.

С.Дойчев, Р.Козарев и В.А.Сендеров. Решение — в №3–1994

1405. В основании пирамиды с вершиной B лежит правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Величины углов BA_1A_2, BA_2A_3, ..., $BA_{n-1}A_n$, ..., BA_nA_1 равны. Докажите, что пирамида правильная.

В.А.Сендеров, В.Н.Дубровский и Н.Б.Васильев. Решение — в №3–1994

1406. На доске написано n выражений вида $*x^2+*x=*$, причём n — нечётное число. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешено заменить одну из звёздочек числом, не равным нулю. Через $2n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может гарантировать себе получить первый игрок?

И.С.Рубанов. Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–1994

1407. В семейном альбоме есть а) десять; б) n фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре — мужчина, слева от мужчины — его сын, а справа — его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если все десять (соответственно, n) мужчин, стоящих в центре, различны?

С.В.Конягин и Н.Б.Васильев. Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–1994

1408. За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо лжец, либо честный. Всех сидящих спрашивают: «Кто ваш сосед справа — лжец или честный?» В ответ честный говорит правду, а лжец может сказать как правду, так и ложь. Количество лжецов не превосходит F. При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на хотя бы одного честного человека в этой компании?

О.Ляшко. Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–1994

1409. Существует такое натуральное числа n, что если правильный треугольник со стороной длины n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $1993n$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника). Докажите это.

С.Августинович и Д.Ван-дер-Флаасс. Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–1994

1410. а) Любые ли два прямоугольника равной площади можно расположить на плоскости так, что любая горизонтальная прямая, пересекающая один из них, будет пересекать и второй по отрезку той же длины?

б) Если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объёмы, то их можно так расположить в пространстве, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй по многоугольнику той же площади. Докажите это.

Д.А. Терёшин. Всероссийская олимпиада. Статья «Обращение принципа Кавальери» второго номера 1994 года

1994 год

1411. Каждый житель острова Невезения либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, причём правдивых — не менее четверти всех жителей. На выборах президента, в которых участвовали все невезенцы, было только два кандидата: Ёлкин и Палкин. На вопрос наблюдателя ООН «за кого Вы голосовали?» большинство невезенцев ответило: «За Палкина»,— а на вопрос «кто победил?» большинство ответило: «Ёлкин».

а) Кто победил на выборах?

б) Можно ли это наверняка определить, если правдивых на острове — лишь одна пятая всех жителей? *Ф.Л.Назаров.* *Решение — в №4–1994*

1412. Натуральные числа x и y таковы, что сумма чисел, первое из которых равно $\frac{x^2-1}{y+1}$, а второе равно $\frac{y^2-1}{x+1}$, является целым числом. Докажите, что каждая из дробей — целое число. *А.Перлин.* *Решение — в №4–1994*

1413. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Величина угла AMD равна 120°. Докажите неравенство $AD \leqslant AB + \frac{BC}{2} + CD$. *С.Берлов.* *Решение — в №4–1994*

1414. Для любого натурального n существует функция f, определённая на множестве всех неотрицательных чисел и такая, что для любого положительного числа x значение $f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$, где функция f применена n раз, равно: а) $x/(x+1)$; б) $1+x+2\sqrt{x}$. Докажите это. *О.Ижболдин и К.П.Кохась.* *Решение — в №4–1994*

1415. Даны два правильных 10-угольника. В каждой вершине того и другого написано натуральное число, причём сумма чисел на каждом 10-угольнике равна 99. Докажите, что можно отметить на том и другом 10-угольнике несколько подряд стоящих вершин (может быть, одну, но не все) так, что суммы отмеченных чисел будут одинаковы. *С.Берлов.* *Решение — в №4–1994*

1416. Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-то одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором никто ни за кем не охотится. *В.А.Уфнаровский.* *Решение — в №4—1994*

1417. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки D и E. Отношение величины угла CDE к величине угла BDE равно отношению величины угла CED к величине угла AFD. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный, если отрезки AE и BD являются а) медианами; б) высотами; в) биссектрисами этого треугольника? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1994*

1418. На плоскости задано конечное множество векторов с длинами не больше 1 и суммой S. Докажите, что для любого числа λ между 0 и 1 найдётся некоторое подмножество этих векторов, сумма которых отличается от λS на вектор длиной не больше $1/\sqrt{2}$. *Д.А.Терёшин и Д.Тамаркин.* *Решение — в №4–1994. Задача М768 (решение — во втором номере 1983 года)*

1419. Пусть $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, где $n > 1$. Докажите, что многочлен f нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 1 с целыми коэффициентами. *В.А.Сендеров. Международная олимпиада, 1993 год.* *Решение — в №4–1994*

1420. Для любых трёх точек P, Q и R плоскости обозначим через $m(PQR)$ наименьшую из высот треугольника PQR. (Если точки лежат на одной прямой, то $m(PQR) = 0$.) Докажите для любых четырёх точек A, B, C и X плоскости неравенство $m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.

Н.Б.Васильев. Международная олимпиада, 1993 год. *Решение — в №4–1994*

1421. а) В выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого углы при вершинах B и D прямые, вписан четырёхугольник с периметром P (его вершины лежат по одной на сторонах четырёхугольника $ABCD$). Докажите неравенство $P > 2BD$.

б) В каких случаях это неравенство превращается в равенство?

Г.Нерсисян (Армения). *Решение — в №5–1994*

1422. Числа 312 500 051 и 1 280 000 401 — составные. Докажите это.

А.А.Егоров. *Решение — в №5–1994*

1423. Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Могло ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C — последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C — первое? За победу присуждают одно очко, за ничью — половину очка.

А.Рубин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5–1994*

1424. В строчку выписано 10 целых чисел. Вторую строку выписываем так: под каждым числом a первой строки пишем число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше a и при этом стоят правее a. По второй строке аналогично строим третью и так далее.

а) Докажите, что все строки, начиная с некоторой, нулевые (состоят только из нулей).

б) Каково максимально возможное число строк, содержащих хотя бы одно отличное от нуля число? *С.И.Токарев.* *Решение — в №5–1994*

1425. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырёхугольник, величины некоторых трёх внутренних углов которого равны 45°. Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5—1994*

1426. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр десятичной записи числа n. Существуют ли такие три различных числа m, n и k, что $m + S(m) = n + S(n) = k + S(k)$?

М.Л.Гервер и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5–1994*

1427. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть больше а) 15; б) 20?

в) Может ли в аналогичной задаче про квадрат $n \times n$ клеток получиться более чем $n^2/4$ частей (для $n > 8$)? *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №5–1994*

1428. Подряд выписаны десятичные записи всех натуральных чисел, начиная с единицы, до некоторого n включительно: $12345678910111213\ldots\overline{n}$. Существует ли такое n, что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?

А.В.Анджанс и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5–1994*

1429. Выпуклый многоугольник разрезан на выпуклые семиугольники (так, что каждая сторона многоугольника является стороной одного из семиугольников.) Докажите, что найдутся четыре соседние вершины многоугольника, принадлежащие одному семиугольнику. *А.Я.Канель.* *Решение — в №5–1994*

1430. Монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... обладает тем свойством, что для любой пары взаимно простых чисел m и n верно равенство $a_{mn} = a_m \cdot a_n$; кроме того, $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$.

а) Докажите равенство $a_3 = 3$.

б) Докажите равенство $a_n = n$ для любого натурального n. (Взаимно простыми называют числа, не имеющие общего делителя, большего 1.) *В.А.Сендеров.* *Решение — в №5–1994*

1431. С натуральным числом проделываем следующую операцию: его последнюю цифру отделяем, умножаем на 4 и прибавляем к оставшемуся числу (например, из 1993 получаем $199+4\cdot 3=211$). С полученным числом проделываем то же самое, и так далее. Докажите, что если в полученной последовательности встретилось число 1001, то в ней нет ни одного простого числа.

Б.Д.Гинзбург и Н.Б.Васильев. *Решение — в №6–1994*

1432. Для любой последовательности положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ целые части квадратных корней из чисел $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$ все различны.

Л.Д.Курляндчик. *Решение — в №6–1994*

1433. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. На лучах BA и DC отложим отрезки BM и DP длиной $(AB+CD)/2$. Аналогично, на лучах CB и AD отложим отрезки CN и AQ длиной $(BC+AD)/2$. Докажите, что $MNPQ$ — прямоугольник, площадь которого равна площади четырёхугольника $ABCD$. *Е.Гольдберг.* *Решение — в №6–1994*

1434. Пусть Земля плоская. Любой ли выпуклый многогранник можно осветить точечным фонарём из некоторой точки пространства так, что его тень будет многоугольником, хотя бы один угол которого острый? *Н.Козеренко и Р.М.Фёдоров.* *Решение — в №6–1994*

1435. В любой многочлен P с целыми коэффициентами степени больше 1 можно подставить некоторый многочлен Q с целыми коэффициентами так, что многочлен $P(Q(x))$ разложится на два множителя ненулевой степени с целыми коэффициентами. Докажите это. *А.Я.Канель-Белов.* *Решение — в №6–1994*

1436. Каков наибольший объём тетраэдра, о котором известно, что длины некоторых а) 4; б) 5; в) всех 6 рёбер не превосходят 1? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–1994*

1437*. Если первые три члена последовательности — целые неотрицательные числа, и если каждый следующий член равен сумме предпредыдущего и предпредпредыдущего, то для любого натурального числа n и для любого простого числа p число $a_{n+3p+1}-a_{n+p+1}-a_{n+1}$ делится на p. Докажите это. *Д.Андриенко и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–1994*

1438. Для любого натурального числа n существует такое число P, что никакое натуральное число, у которого n простых делителей и все они больше P, не может быть совершенным. Докажите это. (Число совершенное, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме себя самого.) *А.Сарсембаев и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–1994*

1439. Длины сторон треугольника равны a, b и c, а длины проведённых к ним медиан равны m_a, m_b и m_c соответственно. Докажите неравенства а) $\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geqslant 2\sqrt{3}$. *Г.Алиханов и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–1994*

1440*. Прямоугольная доска покрыта одинаковыми плитками размера $1\times k$ каждая. Разрешено вынуть любой состоящий из таких плиток квадрат со стороной k и повернуть его на 90°. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все плитки лежали в одном направлении. *А.Я.Канель и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №6–1994*

1441. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что ни в какой момент кузнечики не смогут оказаться в вершинах квадрата большего размера. *А.К.Ковальджи. Московская олимпиада 1994 года.* *Решение — в №1–1995*

1442. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q, причём P лежит на прямой BM, а Q — на BN. Докажите равенство длин отрезков MP и NQ.

И.Нагель. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1443. Бесконечная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ задана первым членом $x_1 \in [0;1]$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. а) Докажите, что последовательность периодическая тогда и только тогда, когда число x_1 рациональное.

б*) Сколько существует для данного натурального числа t таких значений x_1, что длина наименьшего периода последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ равна t?

Г.Шабат и Н.Б.Васильев. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1444. Существует ли многочлен P, один из коэффициентов которого отрицателен, а все коэффициенты многочленов $P^2, P^3, P^4, \ldots$ положительны?

О.Крыжановский. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1445. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулём, которое при вычёркивании некоторой его цифры (не первой) уменьшается в целое число раз.

А.И.Галочкин и Н.Н.Константинов. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1446. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образованы 8 конгруэнтных многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих многогранников имеют общую внутреннюю точку.

Г.А.Гальперин и В.А.Сендеров. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1447. В квадрате размером 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что если расставлять их в

а) указанном порядке (то есть начиная с больших), то этот процесс всегда удастся довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б) если расставлять их в обратном порядке, то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя.

К.Игнатьев. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1448. а) В любом ли многоугольнике можно провести хорду, которая делит его на две части равной площади?

б) Любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше $1/3$ площади многоугольника. Докажите это.

(Хордой многоугольника называем отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а все остальные точки отрезка являются внутренними точками многоугольника.) *В.В.Произволов и Н.Б.Васильев. Московская олимпиада 1994 года.* *Решение — в №1–1995*

1449. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трёх пар биссектрис: внешних углов при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

С.В.Маркелов и Н.Б.Васильев. Московская олимпиада 1994 года. *Решение — в №1–1995*

1450. Для любого натурального $k > 1$ есть такая степень числа 2, что среди k последних цифр её десятичной записи не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = \ldots 96$, $2^{53} = \ldots 992$.) *Н.Б.Васильев. Московская олимпиада 1994 года.* *Решение — в №1–1995*

1451. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ целое. Обозначим $d = \text{НОД}(a;b)$. Докажите неравенство $d^2 \leqslant a+b$.

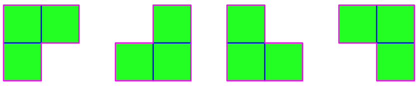
А.С.Голованов и Е.Малинникова. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1452. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Их общая касательная касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная AB, касается окружности S_2 в точке C и пересекает окружность S_1 в точках D и E. Докажите, что а) точки A, F и C лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F.

А.Калинин и В.Д.Дубровский. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1453. Существует ли такой квадратный трёхчлен P с целыми коэффициентами, что для любого натурального числа n, десятичная запись которого состоит только из единиц, число $P(n)$ записывается тоже только единицами?

А.Перлин. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995



1454. Прямоугольник разрезан на уголки. Очевидно, любой уголок ориентирован одним из четырёх способов, изображённых на рисунке. Докажите, что разность между количеством уголков первого типа и количеством уголков второго типа делится на 3.

О.Емельянов. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1455. В вершинах выпуклого n-угольника расставлены более чем n фишек. За один ход разрешено передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну вправо, другую влево. После N ходов в каждой вершине n-угольника оказалось столько же фишек, сколько было вначале. Докажите, что N кратно n.

И.С.Рубанов. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1456. В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше другого. Если первый учится лучше второго, а второй лучше третьего, то первый учится лучше третьего.)

С.И.Токарев. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1457*. Если высоты AA', BB', CC' и DD' тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H вписанной сферы тетраэдра $A'B'C'D'$, то тетраэдр $ABCD$ правильный. Докажите это.

Д.А.Терёшин и В.Н.Дубровский. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1458. В правильном $(6n+1)$-угольнике k вершин покрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски.

Д.Тамаркин. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1459*. Петя и Витя по очереди ходят конём на доске размером 1994×1994. Петя может делать только «горизонтальные» ходы, то есть такие, при которых конь перемещается на соседнюю горизонталь. Вите разрешены только «вертикальные» ходы, то есть такие, при которых конь перемещается на соседнюю вертикаль. Петя ставит коня на поле, с которого начинается игра, и делает первый ход. И Вите, и Пете запрещено ставить коня на поле, где конь уже побывал в данной игре. Проигравшим считают игрока, который не может сделать ход. Докажите, что для Пети существует выигрышная стратегия.

А.Перлин. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1460*. В клетках бесконечного листа клетчатой бумаги записаны вещественные числа. Рассматриваем две фигуры, каждая из которых состоит из конечного числа клеток. Фигуры можно перемещать параллельно линиям сетки на целое число клеток. Известно, что для любого положения первой фигуры сумма чисел, записанных

в накрываемых ею клетках, положительна. Докажите, что существует положение второй фигуры, для которого сумма чисел в накрытых ею клетках положительна.
Б.Д.Гинзбург, И.Соловьёв и Н.Б.Васильев. XX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2—1995

1461. Профессор Тарантого в статье о сепульках дал n определений сепуляции. Аспиранты профессора постепенно доказали равносильность всех этих определений. Каждый из аспирантов защитил диссертацию на тему: «Сепуляция в смысле j-го определения является сепулением в смысле k-го определения.» Какое максимальное количество аспирантов могло быть у Тарантоги, если диссертации защищали последовательно и основной результат никакой очередной диссертации не следовал из ранее защищённых? *К.Мишачёв.* Решение — в №3—1995

1462. Для любого натурального $n \geqslant 2$ квадрат корня n-й степени из $n!$ не меньше произведения корня $(n+1)$-й степени из $(n-1)!$ на корень $(n-1)$-й степени из $(n+1)!$. Докажите это. *Л.Д.Курляндчик и В.А.Сендеров.* Решение — в №3—1995

1463. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что каждое из чисел а) $x+y$, $2x+y$ и $x+2y$; б) $x+y$, $2x+y$ и $3x+y$ является квадратом натурального числа? *Девятиклассник А.Грибалко и В.А.Сендеров.* Решение — в №3—1995

1464. R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника; ρ — радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Докажите неравенства $2\rho \leqslant r \leqslant \sqrt{\rho R}$.
В.А.Сендеров. Решение — в №3—1995

1465. P, Q, R — многочлены, причём степени многочленов P и Q различны и положительны. а) Докажите, что для любого натурального числа k существует не более одного многочлена f степени k со старшим коэффициентом 1 такого, что $f(P(x))f(Q(x)) = f(R(x))$.

б) Найдите хотя бы один такой непостоянный многочлен f, что $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$.

в) Найдите все такие многочлены. *М.Тройников и В.А.Сендеров.* Решение — в №3—1995

1466.* Играют два художника. Первый рисует на плоскости (первоначально пустой) один за другим многоугольники, не имеющие общих внутренних точек, а второй последовательно красит их так, чтобы многоугольники, имеющие хотя бы один общий отрезок, были разного цвета. Может ли первый художник заставить второго использовать более а) пяти; б) десяти цветов? *В.К.Ковальджи.* Решение — в №3—1995

1467. $a_1 < a_2 < \ldots < a_m \leqslant n$ — такие натуральные числа, что любая сумма вида $a_r + a_s$, где $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$, либо больше n, либо принадлежит множеству $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Докажите неравенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}$.
XXXV международная олимпиада. Решение — в №3—1995

1468. ABC — треугольник; $AB = AC$; M — середина отрезка BC; O — такая точка прямой AM, что $OB \perp BA$; Q — внутренняя точка отрезка BC; точки E и F лежат на прямых AB и AC соответственно; точки E, Q и F различны и лежат на одной прямой. Докажите, что $OQ \perp EF$ тогда и только тогда, когда $EQ = QF$.
XXXV международная олимпиада. Решение — в №3—1995

1469. Для любого натурального числа k обозначим через $f(k)$ количество элементов множества $\{k, k+1, \ldots, 2k\}$, двоичная запись которых содержит ровно три единицы.
а) Докажите, что для любого натурального числа m существует такое k, что $m = f(k)$.

б) Для каких m такое k единственно? *XXXV международная олимпиада.* Решение — в №3—1995

1470*. Докажите существование такого множества A натуральных чисел, что для любого бесконечного множества S простых чисел существует такое $k \geqslant 2$, что в виде произведения k различных элементов множества S представим как некоторый элемент множества A, так и некоторый элемент множества $\mathbb{N} \setminus A$.

XXXV международная олимпиада. Решение — в №3—1995

1995 год

1471. Лыжник проехал через каждую из n деревень по два раза и вернулся в исходную точку. Всегда ли по его лыжне можно проехать так, чтобы побывать в каждой деревне ровно один раз? Возвращаться в исходную точку не обязательно.

М.Л.Гервер и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1995

1472. Для каких натуральных n в таблице

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{array}$$

можно выбрать n различных чисел в разных столбцах и строках?

А.П.Савин и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1995

1473. Обозначим через c_n первую цифру десятичной записи числа 2^n. а) Сколько единиц среди первых 1000 членов этой последовательности? б) Докажите, что в последовательности $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 8$, $c_4 = 1$, $c_5 = 3$, $\ldots$ встречается ровно 57 различных подпоследовательностей $c_k c_{k+1} \ldots c_{k+12}$ длины 13.

А.Я.Канель и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1995

1474. На плоскости дан вектор $\vec{v}$ длины 1. Можно провести любую прямую и построить ортогональную проекцию вектора $\vec{v}$ на эту прямую. Полученный вектор можно ортогонально спроецировать на вторую прямую, полученный вектор — на третью, и так далее. Можно ли таким образом получить перпендикулярный вектору $\vec{v}$ вектор, длина которого не меньше 0,99?

Б.Д.Гинзбург и Н.Б.Васильев. Решение — в №4–1995

1475. Полоска бумаги размера $1 \times n$ разбита на n единичных квадратов. В квадраты записывают числа 1, 2, $\ldots$, n следующим образом. Сначала в некоторый квадрат пишут число 1, затем число 2 пишут в один из соседних квадратов, число 3 — в один из соседних с одним из уже занятых квадратов и так далее. (Произвол — в выборе первого квадрата и выбор соседа на каждом шаге.) Сколькими способами это можно сделать?

А.Х.Шень, Н.Б.Васильев и С.В.Конягин. Решение — в №4–1995

1476. Не существуют такие простые числа p и q, что $p \neq q$, но $2^p + 1$ делится на q и $2^q + 1$ делится на p. Докажите это.

С.Керопян и В.А.Сендеров. Решение — в №4–1995

1477. Существует ли выпуклый а) 5-угольник; б) n-угольник, от которого можно отрезать подобный ему многоугольник?

С.И.Токарев. Решение — в №4–1995

1478. Существует ли такой многочлен $P(x) = x^4 + bx^2 + c$, что $b > 0$, $c > 0$ и а) уравнение $P(x) = x^2$ не имеет вещественных корней, а уравнение $P(P(x)) = x^2$ имеет хотя бы один вещественный корень; б) уравнение $P(x) = x^2$ имеет хотя бы один вещественный корень, а уравнение $P(P(x)) = x^2$ не имеет ни одного вещественного корня.

В.А.Сендеров. Решение — в №4–1995

1479*. Число 26 можно тремя способами разложить в сумму четырёх натуральных чисел так, что все 12 чисел различны: $26 = 1+6+8+11 = 2+5+9+10 = 3+4+7+12$. Для каждого натурального n обозначим через $K(n)$ наибольшее количество четвёрок натуральных чисел, сумма чисел каждой из которых равна n, а все $4K(n)$ чисел различны. Докажите равенство $K(n) = \left[\frac{n-2}{8}\right]$.

Л.Д.Курляндчик. Решение — в №4–1995

1480*. Назовём ежом тело, составленное из куба и шести приклеенных к нему (в точности по граням) кубов того же размера. Кнопкой назовём тело, полученное из ежа отбрасыванием одного из кубиков (не центрального). Назовём 2-ежом состоящее из 13 кубиков тело, полученное приклеиванием к одному (центральному) кубу по 2 куба в каждом из 6 направлений. Разбейте пространство на а) ежи; б) кнопки; в) 2-ежи. г) Придумайте ещё фигуры из кубов, на которые можно разбить пространство.
А.В.Спивак. *Решение — в №4—1995*

1481. AK — биссектриса треугольника ABC, D — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине B с описанной окружностью. Докажите, что если $BC > AB$, то

$$\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB} - \frac{\sin\angle CDK}{\sin\angle BDK} = 1.$$

Я.Константиновский и О.Сулим. *Решение — в №5—1995*

1482. Найдите все такие натуральные числа x, что десятичная запись числа $1+2+\ldots+x$ получается из числа x приписыванием к десятичной записи числа x слева цифры 1.
П.Филевич. *Решение — в №5—1995*

1483. Найдите наименьшую возможную длину суммы семи векторов единичной длины, у каждого из которых и абсцисса, и ордината неотрицательны.
Б.Д.Гинзбург и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5—1995*

1484. Можно ли разбить пространство на конгруэнтные а) тетраэдры; б) равногранные тетраэдры; в) разногранные тетраэдры? (Тетраэдр называем разногранным, если ни одна его грань не конгруэнтна ни одной другой.)
Н.Б.Васильев. *Решение — в №5—1995*

1485. Для любой неубывающей последовательности x_1, x_2, ..., x_n неотрицательных чисел докажите, что значение выражения

$$x_2^k(x_1-x_3)+x_3^k(x_2-x_4)+\ldots+x_1^k(x_n-x_2)$$

неотрицательно при $k>1$ и неположительно при $0<k<1$.
Л.Д.Курляндчик и В.А.Сендеров. *Решение — в №5—1995*

1486. Можно ли из чисел 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... выбрать последовательность из а) 5; б) n; в) бесконечного множества чисел, каждое из которых, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих?
С.И.Токарев и Н.Б.Васильев. *Решение — в №5—1995*

1487*. H — точка пересечения высот, O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трёх отрезков OH, IH и OI наибольший — OH.
В.А.Сендеров. *Решение — в №5—1995. Статья В.Н.Дубровского и В.А.Сендерова «Ловушка для треугольника» третьего номера 1999 года*

1488. а) Существует ли бесконечная последовательность квадратов натуральных чисел, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих?

б) Существует ли возрастающая последовательность квадратов натуральных чисел, сумма любых двух соседних членов которой — квадрат целого числа?
О.Крыжановский. *Решение — в №5—1995*

1489. Для каких прямоугольников размером $m\times n$ на клетчатой бумаге, в клетках которых расставлены нули и единицы, можно из любой расстановки получить любую другую, если разрешено менять одновременно все числа одной строки, все числа одного столбца и все числа любой диагонали (в частности, любой угловой клетки)?
А.И.Галочкин и Б.М.Ивлев. *Решение — в №5—1995*

1490. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника, периметр которого меньше π. Докажите, что а) из синусов чисел x, y, z можно составить треугольник; б*) площадь этого треугольника не превосходит $1/8$ суммы синусов чисел $2x$, $2y$ и $2z$.

В.А.Уфнаровский. Решение — в №5—1995

1491*. а) Существуют ли такие 1995-значные числа a и b, что 3990-значное число $\overline{ab}$ кратно числу $\overline{ba}$?

б) Для каких натуральных n существует пара таких n-значных чисел?

П.Филевич, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Решение — в №6–1995

1492. M — произвольная точка плоскости, AH, BK и CL — высоты треугольника ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников AHM, BKM и CLM пересекаются ещё в некоторой точке, отличной от точки M.

С.В.Маркелов и Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1995

1493*. Обозначим $s(n) = 1^1 + 2^2 + \ldots + n^n$. Докажите для любого $n > 3$ неравенства а) $3s(n) > (n+1)^n$; б) $2s(n) < (n+1)^n$; в) $\frac{1}{n^n} > \frac{1}{s(n)} + \frac{1}{s(n+1)} + \frac{1}{s(n+2)} + \frac{1}{s(n+3)} + \ldots$

А.Грибалко и В.А.Сендеров. Решение — в №6–1995

1494. Любой прямоугольный треугольник разрешено разрезать на два по высоте, опущенной на гипотенузу. Можно ли, начав с четырёх одинаковых прямоугольных треугольников, добиться того, чтобы все треугольники стали разного размера?

А.В.Шаповалов и Н.Б.Васильев. Решение — в №6–1995. Статья А.Б.Ходулёва «Расселение фишек» седьмого номера 1982 года

1495*. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD и DOA обозначим соответственно r_1, r_2, r_3 и r_4. Докажите, что четырёхугольник описанный тогда и только тогда, когда $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.

И.З.Вайнштейн, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Решение — в №6–1995

1496. Рассмотрим решения в натуральных числах уравнений вида $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1x_2\ldots x_n$. Докажите следующие утверждения.

а) Для любого натурального k существует бесконечно много таких n, что уравнение имеет хотя бы одно решение.

б) Для любого натурального $k > 3$ найдите наименьшее $n > k$, для которого уравнение имеет хотя бы одно решение.

в) Если $n = 3$, то уравнение имеет решение лишь при $k = 1$ или 3.

г) Если $k = 2$, то при $n = 4$ или 5 решений нет, а при $n = 7$ — есть.

д) Если $k = 3$, то при $n = 4$ решений нет, а при $n = 6$ — есть.

е) Фиксируем k и $n > 1$. Верно ли, что если уравнение имеет хотя бы одно решение, то оно имеет их бесконечно много?

Н.Б.Васильев, В.А.Сендеров и А.Б.Скопенков. Статья «Вокруг уравнения Маркова» шестого номера 1995 года

1497. На торической доске размером 15×15 нельзя расставить 15 ферзей, не бьющих друг друга. Докажите это. (Другими словами, не существуют 15 пар натуральных чисел, не превосходящих числа 15, для которых различны как все первые числа всех пар, так и все вторые числа всех пар, все остатки от деления на 15 сумм чисел пар и, наконец, все остатки от деления на 15 разностей первого и второго чисел пар.)

А.К.Толпыго. Решение — в №6–1995

1498*. Для каждого натурального $n > 1$ решите систему уравнений $\begin{cases} x_2(x_n - x_1) & = 1, \\ x_3(x_n - x_2) & = 1, \\ \ldots & \\ x_n(x_n - x_{n-1}) & = 1, \\ x_n x_1 & = 2. \end{cases}$

Б. Кукушкин. Решение — в №6—1995

1499*. Число 2 представимо в виде суммы трёх четвёртых степеней рациональных чисел бесконечным множеством способов. Докажите это.

М. Ахвердиев, Л.Д. Курляндчик, С. Маміконян и В.А. Сендеров. Решение — в №6—1995

1500*. В любой состоящей из 50 человек компании существуют двое, имеющие среди остальных чётное число (быть может, 0) общих знакомых. Докажите это.

С.И. Токарев. Решение — в №6—1995

1501. Числа a_1, a_2, ..., a_n таковы, что для любого числа x верно неравенство $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leqslant |\sin x|$. Докажите неравенство $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant 1$.

В.А. Сендеров. Решение — в №1—1996

1502. Прямая отрезает от правильного n-угольника треугольник APQ так, что $PA + AQ = 1$, где A и B — соседние вершины n-угольника. Найдите сумму величин углов, под которыми отрезок PQ виден из всех вершин n-угольника, кроме A.

В.В. Произволов. Решение — в №1—1996

1503. Все натуральные числа раскрашены в два цвета — чёрный и белый. Сумма любого чёрного и любого белого чисел чёрная, а произведение любого чёрного и любого белого чисел белое. а) Докажите, что произведение любых двух белых чисел — белое. б) Опишите все возможные варианты раскраски. *П. Филевич.* Решение — в №1—1996

1504. а) Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что из чисел $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ ровно одно — целое? б) Если числа a, b, c, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ натуральные, то $a = b = c$. Докажите это. *А. Грибалко.* Решение — в №1—1996

1505. Вершины A, B и B, C треугольника ABC являются соответственными вершинами двух подобных параллелограммов $ABDE$ и $BCFG$, построенных на сторонах AB и BC вне треугольника. Докажите, что медиана BM треугольника ABC при продолжении образует с прямой DG углы, равные углам параллелограммов.

В.Н. Дубровский. Решение — в №1—1996

1506. Любой отрезок числовой оси можно разбить на несколько чёрных и белых отрезков так, чтобы сумма интегралов по белым отрезкам от а) любого квадратного трёхчлена; б) любого многочлена степени не выше данной была равна сумме интегралов по чёрным отрезкам. Докажите это. *Г.В. Кондаков.* Решение — в №1—1996

1507. M — основание перпендикуляра, опущенного из центра O вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$ на прямую AC. Докажите, что точка O равноудалена от прямых BM и DM. *С.В. Маркелов и Н.Б. Васильев.* Решение — в №1—1996

1508. Судьям принесли собой 80 банок денег. Массы всех банок различны и известны (имеется список). Этикетки потерялись, и только принесший банки адвокат помнит, где что. Он хочет доказать это судьям, используя только список и чашечные весы со стрелкой, показывающей разность весов грузов на чашках. Докажите, что он а) может это сделать за четыре взвешивания; б) не может за три.

Н.Н. Константинов и А.К. Толпыго. Решение — в №1—1996

1509. На плоскости расположено несколько точек, соединённых непересекающимися дугами. На каждой дуге написано одно из чисел 1, 2, 3. В каждой точке сходятся три дуги, занумерованных разными числами. Припишем каждой точке знак $+$ или — в зависимости от того, в каком порядке (по часовой стрелке или против неё) встречаются номера 1, 2, 3 входящих в неё дуг. Докажите, что разность количеств положительных и отрицательных точек делится на 4.

С.Дужин и Н.Б.Васильев. *Решение — в №1–1996*

1510*. Существует а) хотя бы одно составное число n, что $3^{n-1}-2^{n-1}$ кратно n; б) бесконечно много таких натуральных n. Докажите это. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №1–1996*

1511. Через точку A провели две окружности и в каждой из них — диаметр, параллельный касательной, проведённой в точке A к другой окружности, причём эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности. *С.Берлов. Санкт-Петербургская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1512. а) $f(x)$ — многочлен чётной степени, отличный от 0. Докажите, что существует такое натуральное число k, что многочлен $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$ не имеет вещественных корней.

б) $f(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что существует такое натуральное число k, что многочлен $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$ имеет ровно один вещественный корень.

С.Берлов, К.П.Кохась и В.А.Сендеров. Санкт-Петербургская олимпиада. *Решение — в №2—1996*

1513*. Докажите равенство $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{\pi}{7}=\sqrt{7}$.

Из задач олимпиады Дж.Сороса. *Статья Н.Б.Васильева и В.А.Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$ второго номера 1996 года»*

1514*. Прямоугольник разбит на доминошки (то есть прямоугольники 1×2). Докажите, что его клетки можно так раскрасить в два цвета, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета. *Д.Карпов. Санкт-Петербургская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1515. $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8? *С.И.Токарев. Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1516. Имеются три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму денег (если Сизиф не может расплатиться, то Зевс великодушно позволяет ему совершить перетаскивание в долг). В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых они лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

И.Изместьев, Д.Кузнецов и И.Рубанов. Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2—1996*

1517. Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается единожды и при этом для любого натурального числа k сумма первых k членов последовательности делится на k?

А.В.Шаповалов и О.Ляшко. Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2—1996*

1518. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере. *Д.А.Терёшин. Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1519*. На плоскости отмечены две точки на расстоянии 1. Разрешено, измерив циркулем расстояние между любыми двумя отмеченными точками, провести окружность с этим радиусом и центром в любой отмеченной точке. Линейкой разрешено провести прямую через любые две отмеченные точки. При каждом построении отмечаем все точки пересечения проведённых линий. Пусть $Ц(n)$ — наименьшее количество линий, которые позволяют только циркулем построить две отмеченные точки на расстоянии n одна от другой, где n — натуральное число; $ЛЦ(n)$ — то же, но циркулем и линейкой. Докажите, что последовательность $Ц(n)/ЛЦ(n)$ не ограничена. *А.Я.Канель-Белов. Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1520*. Старшие коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны 1. Докажите, что сумма квадратов многочленов $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$. *М.Миньотт, А.И.Галочкин и Н.Б.Васильев. Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2—1996*

1521. Каждый из 256 депутатов парламента ответил на каждый 8 вопросов «да» или «нет». Любые два из них ответили по разному хотя бы на один из вопросов. Можно ли их так рассадить на 256 стульев, расставленных в виде квадрата размером 16×16, чтобы ответы каждого отличались от ответа любого из его соседей справа, слева, спереди или сзади ровно по а) одному вопросу; б) семи вопросам? *Н.Б.Васильев и Ю.П.Лысов.* *Решение — в №3–1996*

1522. Для любых натуральных чисел d, k и m существует такое натуральное число n, что $(\sqrt{m}+\sqrt{m+d})^k=\sqrt{n}+\sqrt{n+d}$. Докажите это. *П.Филевич.* *Решение — в №3–1996 и в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

1523. Пусть $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=5$ и $a_{n+1}=a_1a_2\ldots a_n-1$ при $n>4$. Докажите равенство $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{70}^2=a_1a_2a_3\ldots a_{70}$. *Л.Д.Курляндчик.* *Решение — в №3–1996*

1524. P — точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABP, BCP, CDP и DAP лежат на одной окружности. *И.З.Вайнштейн и А.А.Заславский.* *Решение — в №3–1996*

1525. A, B, C и D — различные точки прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y. Прямые XY и BC пересекаются в точке Z. Точка P принадлежит прямой XY и отлична от точки Z. Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M; прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N. Докажите, что прямые AM, DN и XY пересекаются в одной точке. *Н.Б.Васильев и Энди Лю. XXXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №3–1996*

1526. Для любых положительных чисел a, b и c, произведение которых равно 1, докажите неравенство $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$. *Э.Лю, В.А.Сендеров и В.Данилов. XXXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №2–1997 и №3–1996*

1527. Найдите все натуральные числа $n>3$, для которых существуют такие точки A_1, A_2, ..., A_n плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие числа s_1, s_2, ..., s_n, что площадь любого треугольника $A_kA_lA_m$, где $1\leqslant k<l<m\leqslant n$, равна $s_k+s_l+s_m$. *Э.Лю. XXXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №3–1996*

1528. Найдите наибольшее x_0, для которого существуют такие числа x_0, x_1, ..., x_{1985}, что выполнены следующие условия: $x_0=x_{1985}$ и $x_{k-1}+\frac{2}{x_{k-1}}=2x_k+\frac{1}{x_k}$ при $k=1$, 2, ..., 1995. *Й.Нотенбоом и Э.Лю. XXXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №3–1996*

1529. $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$ и $\angle BCD=\angle EFA$. Точки G и H лежат внутри шестиугольника $ABCDEF$. Выведите неравенство $AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$ а) из равенств $\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$; б) в общем случае. *Н.Б.Васильев. XXXVI Международная олимпиада.* *Решение — в №3–1996*

1530*. Пусть p — нечётное натуральное число. Найдите количество p-элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2p\}$, сумма всех элементов которого делится на p.

М. Кучма и Э. Лю. XXXVI Международная олимпиада. *Решение — в №3–1996*

1996 год

1531. На плоскости нарисован квадрат и отмечена невидимая точка P. Разрешено провести любую прямую и спросить, по какую сторону от неё (или на самой прямой) лежит точка P. За какое наименьшее число вопросов можно выяснить, лежит ли точка P внутри квадрата? *А.Я.Канель и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №4–1996*

1532. Существуют ли а) 4 различных натуральных числа; б) 5 различных натуральных чисел; в) 5 различных целых чисел; г) 6 различных целых чисел таких, что сумма любых трёх из них — простое число? *П.Филевич и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1996*

1533. На плоскости даны точки A, B и C. Проведите через точку C прямую, произведение расстояний до которой от точек A и B наибольшее. Всегда ли такая прямая единственна? *Н.Б.Васильев.* *Решение — в №4–1996*

1534. Для любых n положительных чисел разность между их суммой и умноженным на n корнем n-й степени из произведения рассматриваемых n чисел не меньше квадрата разности квадратных корней из наибольшего и наименьшего этих чисел. Докажите это. *Л.Д.Курляндчик.* *Решение — в №4–1996*

1535. Куб с ребром 1 надо обшить (в один слой) куском ткани. а) Докажите, что если узелки, где сходятся по крайней мере три шва, могут лежать только в вершинах, то сумма длин швов не меньше 7. б) Может ли эта длина быть меньше 6,5? *Н.Б.Васильев и А.В.Шаповалов.* *Решение — в №4–1996*

1536. Существуют ли а) два; б) три конгруэнтных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают? (Многоугольник — это часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной.) *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–1996*

1537. Про n чисел, произведение которых равно p, известно, что разность между числом p и каждым из этих чисел — нечётное целое число. Докажите, что все эти числа иррациональны. *Н.Б.Васильев и Г.А.Гальперин.* *Решение — в №5–1996*

1538. Прямоугольник размером $a \times b$, где $a > b$, разбит на прямоугольные треугольники, граничащие между собой только по сторонам целой длины, так что общая сторона любых двух треугольников является катетом одного и гипотенузой другого. Докажите неравенство $a \geqslant 2b$. *Н.Н.Константинов и А.В.Шаповалов.* *Решение — в №5–1996*

1539. Капитан нашёл Остров Сокровищ, имеющий форму круга. На его берегу растут шесть пальм. Капитан знает, что клад закопан в середине отрезка, соединяющего ортоцентры (точки пересечения высот) треугольников ABC и DEF, где A, B, C, D, E, F — эти шесть пальм, но он не знает, какой буквой обозначена каждая пальма. Докажите, что тем не менее он может найти клад с первой же попытки. *С.В.Маркелов.* *Решение — в №5–1996*

1540. В компанию, состоящую из n человек, пришёл журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, а его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли Вы такого-то?»

а) Может ли журналист установить, кто в компании — Z, задав менее n вопросов?

б) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z; докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. (Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.) *Г.А.Гальперин.* *Решение — в №5–1996*

1541. Вдоль лыжной трассы расставлено в ряд бесконечное число кресел, занумерованных по порядку натуральными числами. Кассир продала билеты на первые m мест, но на некоторые места она продала не один билет, и общее количество проданных билетов больше m. Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подходя к месту, указанному на его билете, занимает это место, если оно свободно, а если место занято, говорит «Ох!» и идёт к следующему по номеру месту. Если оно свободно, то занимает его, а если не занято, снова говорит «Ох!» и движется дальше — до свободного места. Докажите, что общее количество «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

А.Х.Шень и Н.Б.Васильев. Решение — в №5–1996

1542. а) К любому ли шестизначному числу, начинающемуся с цифры 5, можно приписать справа ещё 6 цифр так, чтобы полученное число было квадратом натурального числа?

б) Тот же вопрос про число, начинающееся на 1.

в) Найдите для каждого натурального n такое наименьшее число k, что к любому n-значному числу можно так приписать справа k цифр, чтобы полученное $(n+k)$-значное число было квадратом натурального числа.

М.Бронштейн и А.К.Толпыго. Решение — в №5–1996

1543. В плоскости выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположена точка P. Построены биссектрисы PK, PL, PM и PN треугольников APB, BPC, CPD и DPA.
а) Найдите хотя бы одну такую точку P, для которой точки K, L, M и N, лежащие соответственно на отрезках AB, BC, CD и DA, являются вершинами параллелограмма.

б) Найдите все такие точки P.

С.И.Токарев. Решение — в №5–1996

1544. Существует ли такая возрастающая арифметическая прогрессия из а) 11; б) 1000; в) бесконечного множества натуральных чисел, что суммы цифр десятичных записей её членов также составляют арифметическую прогрессию?

А.В.Шаповалов и С.А.Дориченко. Решение — в №5–1996

1545. Имеются доска размером 1×1000 и n фишек. Играют двое. Ходят по очереди. Первый своим ходом выставляет на доску не более 17 фишек, по одной на любое свободное поле (можно все 17 взять из кучи, а можно только часть, скажем $k<17$ штук — из кучи, а остальные, не более $17-k$, переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек, то есть несколько фишек, стоящих подряд (без пробелов между ними), и кладёт их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все n фишек в одну серию. Докажите, что первый игрок при а) $n=98$ может выиграть; б) $n>98$ — нет.

А.В.Шаповалов. Решение — в №5–1996

1546. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC с углом α при вершине A взята точка D так, что $AD=AB/n$. Найдите сумму $n-1$ углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих основание BC на n равных частей, если а) $n=3$; б) n — любое натуральное число.

В.В.Произволов. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №6–1996

1547. а) 8 школьников решали 8 задач. Каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что существуют такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

б) А если каждую задачу решили 4 ученика?

С.И.Токарев и Н.Б.Васильев. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №6–1996

1548. Найдите многочлен с целыми коэффициентами а) четвёртой степени, среди корней которого есть число $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$; б) пятой степени, среди корней которого есть число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$.

в) Докажите существование многочлена с целыми коэффициентами n-й степени, среди корней которого есть число $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$.

Б.Кукушкин. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №6–1996. Статья Н.Б.Васильева и А.В.Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения» первого номера 1981 года

1549. Для любого многочлена $P(x)$ ненулевой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положителен, и любого натурального числа k существует такое целое число m, что числа $P(m)$, $P(m+1)$, ..., $P(m+k)$ — составные. Докажите это.

В.А.Сендеров. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №6–1996

1550. В 2^n строках таблицы размером $n\times 2^n$ выписаны все возможные различные наборы из n чисел 1 и -1, а затем некоторые числа заменены нулями. Докажите, что можно выбрать некоторое такое подмножество строк, что а) сумма чисел выбранных строк равна 0; б) сумма выбранных строк равна нулевой строке, то есть в любом столбце сумма чисел выбранных строк равна 0.

Г.В.Кондаков и Н.Б.Васильев. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №6–1996

1551. Вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь такая ломаная?

Н.Б.Васильев. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997

1552. Обозначим через $P_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ многочлен $(n-1)$-й степени, все коэффициенты которого равны 1. Докажите следующие утверждения. а) Для любого натурального числа s существует такое натуральное число k, что многочлен $P_k(x)$ можно разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами, свободные члены которых равны 1, а коэффициент при первой степени переменной в одном из этих множителей равен s. б) Такое k существует не только для любого натурального, но и для любого целого числа s.

В.А.Сендеров, LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997

1553. Из чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{100}$ составим всевозможные подмножества, каждое из которых состоит из чётного числа элементов, и для каждого такого подмножества вычислим произведение всех его элементов. Найдите сумму всех таких произведений.

Н.Б.Васильев. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997

1554. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$, $BCKL$ и $ACPQ$. Выразите разность квадратов длин отрезков NQ и PK через разность площадей квадратов $ABMN$ и $BCKL$.

А.Герко и М.Н.Вялый. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997

1555. Даны два непересекающихся круга и такая точка P, что длины всех четырёх касательных PA, PB, PC и PD равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных этих кругов.

Н.Б.Васильев и С.В.Маркелов. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997

1556. Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что а) число n представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, а числа $n-1$ и $n+1$ не представимы; б) каждое из чисел $n-1$, n и $n+1$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. Докажите это.

Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. Решение — в №1–1997. Статья «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» третьего номера 1999 года

1557. Точки A и B — две данные точки данной окружности. Найдите множество середин хорд этой окружности, пересекающих отрезок AB.

И.Ф.Шарыгин. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №1–1997*

1558. Игра происходит на доске размером $n\times n$. Двое поочередно передвигают по доске ладью, при этом не разрешено, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала или через которое уже проходила. Изначально ладья стоит в углу доски. Проигравшим считают того, кому некуда ходить. Для кого существует выигрышная стратегия: для начинающего игру или для его противника?

Б.Бегун. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №1–1997*

1559. Существует ли куб, расстояния от вершин которого до некоторой плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

В.В.Произволов. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №1–1997*

1560. В некотором государстве человек может быть зачислен в гвардию лишь в случае, если он выше ростом, чем не менее 80% его соседей — людей, живущих на расстоянии менее R от него. В этом же государстве человека освобождают от службы в армии, если он ниже ростом, чем не менее 80% его соседей — людей, живущих на расстоянии менее r от него. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в гвардию и не менее 90% освобождены от армии? (Значения r и R должны быть выбраны так, чтобы для любого человека множества соседей были непустыми.)

Н.Н.Константинов. LIX московская олимпиада и весенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №1–1997*

1561. Никакие две стороны выпуклого многоугольника не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удалённой от содержащей эту сторону прямой. Докажите, что сумма величина таких углов равна 180°.

М.В.Смуров и Н.Б.Васильев. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №2–1997*

1562. Можно ли прямоугольник размером 5×7 покрыть не выходящими за его пределы трёхклеточными уголками (то есть фигурами, получаемыми из квадрата размером 2×2 удалением одной клетки) так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одним и тем же числом слоёв?

М.А.Евдокимов. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №2–1997*

1563*. Если ни одно из чисел a_1, a_2, ..., a_m не равно 0 и $a_1+a_2\cdot 2^k+a_3\cdot 3^k+\ldots+a_m\cdot m^k = 0$ для любого неотрицательного k, где $k\leqslant n<m-1$, то в последовательности a_1, a_2, ..., a_m есть по крайней мере $n+1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки.

О.Р.Мусин. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №2–1997*

1564*. Существует ли такое конечное множество M вещественных чисел, что $0\notin M$ и для любого натурального n существует многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого вещественны и тоже принадлежат множеству M?

Е.Малинникова. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №2–1997*

1565*. В строку в неизвестном порядке записаны первые 100 натуральных чисел. За один вопрос про любые 50 чисел можно выяснить, в каком порядке друг относительно друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел?

С.И.Токарев. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №2–1997*

1566. Дума состоит из 1600 депутатов, которые образовали 16 000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите существование двух комитетов, имеющих не менее чем 4 общих членов.

Н.Б.Васильев и А.Б.Скопенков. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №3–1997*

1567*. Центры A, B и C трёх непересекающихся окружностей с одинаковыми радиусами расположены в вершинах треугольника. Из точек A, B и C проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый четырёхугольник, стороны которого через одну покрашены двумя цветами. Докажите, что сумма длин отрезков одного цвета равна сумме длин отрезков другого цвета.

Д.А.Терёшин. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №3–1997*

1568. При $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником. Докажите это.

Н.Х.Агаханов и Д.А.Терёшин. Всероссийская олимпиада 1996 года. *Решение — в №3–1997*

1569*. Придумайте многочлен с рациональными коэффициентами, минимальное значение которого равно а) $-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$.

в) Не существует многочлена четвёртой степени, удовлетворяющего условию пункта б). Докажите это.

г) Существуют ли многочлены с целыми коэффициентами, один из которых удовлетворяет условиям пункта а), а другой — условиям пункта б)?

А.В.Спивак и В.А.Сендеров. *Решение — в №2—1997*

1570. Три пары диаметрально противоположных точек сферы — вершины выпуклого многогранника с 6 вершинами. Один из его двугранных углов — прямой. Докажите, что у него ровно 6 прямых двугранных углов.

И.Ф.Шарыгин. Соросовская олимпиада. *Решение — в №3–1997*

1571. Дана прямоугольная доска $ABCD$ со сторонами $AB = 20$ и $BC = 12$, разбитая на $20 \cdot 12 = 240$ единичных квадратов. Пусть r — натуральное число. За один ход монету можно передвинуть из одного единичного квадрата в другой в том и только том случае, когда расстояние между их центрами равно $\sqrt{r}$. Требуется найти последовательность ходов, переводящих монету из единичного квадрата с вершиной A в единичный квадрат с вершиной B.

а) Докажите, что это невозможно, если r делится на 2 или 3.

б) Докажите, что это можно сделать при $r = 73$.

в) Можно ли это сделать при $r = 97$?

Д.А.Терёшин. XXXVII международная олимпиада, задачу предложила Финляндия. *Решение — в №3–1997*

1572. Внутри треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Обозначим буквами D и E центры вписанных окружностей треугольников APB и APC. Докажите, что пересекаются в одной точке прямые а) AP, BD и CE; б) AP, BE и CD.

Д.А.Терёшин. XXXVII международная олимпиада, задачу предложила Канада. *Решение — в №3–1997*

1573. Натуральные числа x и y таковы, что числа $15x + 16y$ и $16x - 15y$ являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимальный из этих квадратов.

В.А.Сендеров. XXXVII международная олимпиада, задачу предложила Россия. *Решение — в №3–1997*

1574. $ABCDEF$ — выпуклый четырёхугольник, причём $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$. Докажите, что сумма радиусов описанных окружностей треугольников ABF, BCD и DEF не меньше полупериметра шестиугольника $ABCDEF$.

Н.Седракян и И.Ф.Шарыгин. XXXVII международная олимпиада, задачу предложила Армения. *Решение — в №3–1997*

1575. Пусть n, p, q — такие натуральные числа, что $n > p+q$, а x_0, x_1, ..., x_n — такие целые числа, что $x_0 = x_n = 0$ и для любого натурального k, где $k \leqslant n$, выполнено одно из равенств $x_k - x_{k-1} = p$ или $x_k - x_{k-1} = -q$. Докажите существование таких чисел k и m, что $1 \leqslant k < m \leqslant n$ и $x_k = x_m$.

С.Рукшин. XXXVII международная олимпиада, задачу предложила Франция. *Решение — в №3–1997*

1997 год

1576. а) Можно ли отметить на плоскости 4 красные и 4 чёрные точки так, чтобы для любых трёх точек одного цвета нашлась точка другого цвета, являющаяся вместе с тремя рассматриваемыми точками вершиной параллелограмма?

б) Можно ли 4 вершины куба покрасить красной краской, а 4 — чёрной так, чтобы в любой плоскости, проходящей через три вершины одного цвета, лежала хотя бы одна вершина другого цвета?
Н.Б.Васильев и И.Ф.Шарыгин. Осенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №4–1997*

1577. В треугольнике отношение синуса некоторого угла к косинусу другого равно тангенсу третьего. Докажите, что высота, проведённая из вершины первого угла, медиана, проведённая из вершины второго, и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке. *Л.Альтшулер и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1997*

1578*. Не существует ни одной всюду определённой функции f, удовлетворяющей равенству $f(f(x)) = x^2 - 1997$ для любого x. Докажите это.
С.А.Богатый, М.В.Смуров и Н.Б.Васильев. Осенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №4–1997*

1579. Пусть A', B', C', D', E' и F' — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA соответственно выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Выразите площадь шестиугольника $ABCDEF$ через площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA' и FAB'. *Н.Б.Васильев. Осенний тур Турнира городов 1996 года.* *Решение — в №4–1997*

1580. Можно ли несколькими отрезками и дугами разрезать круг на части и сложить из этих частей квадрат той же площади?
А.Я.Канель. Осенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №4–1997*

1581*. а) Существует ли такое шестизначное число a, что ни одно из чисел a, $2a$, ..., $500\,000a$ не оканчивается шестью одинаковыми цифрами?

б*) Для любого натурального числа k, не равного 1, найдите такое наименьшее натуральное число n, что для любого натурального a хотя бы одно из чисел a, $2a$, ..., na оканчивается k одинаковыми цифрами.
С.И.Токарев. Осенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №4–1997*

1582. По кругу выложены n карточек оборотной стороной вверх. На карточках написаны неизвестные различные числа. Разрешено переворачивать карточки по одной, всего не более k штук. Научитесь находить такую карточку, что написанное на ней число больше чисел обеих её соседок, если а) $n = 5$ и $k = 4$; б) $n = 76$ и $k = 10$; в) $n = 199$ и $k = 12$. *В.Ю.Протасов.* *Решение — в №4–1997*

1583. а) Длина медианы тетраэдра (то есть длина отрезка, соединяющего вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани) не превосходит среднего арифметического длин рёбер, выходящих из той же вершины. Докажите это.

б) Длина биссектрисы тетраэдра (то есть длина отрезка, идущего от вершины к противоположной грани и равнонаклонённого к содержащим эту вершину граням) меньше половины суммы длин рёбер, выходящих из той же вершины?

в) Верно ли для биссектрисы неравенство пункта а)? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1997*

1584. Бесконечная последовательность получается почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли такая последовательность начинаться с чисел а) 1, 1, 3 и 5; б) 1, 2, 3 и 5; в) 1, 2, 3 и 4; г) 1, 2, 3 и 2?

д) Если первые четыре члена такой последовательности — рациональные числа, то и все другие члены этой последовательности — рациональные числа. Докажите это. *Н.Б.Васильев. Заочный тур Соросовской олимпиады.* *Решение — в №4–1997*

1585. В новой лотерее на карточке размером 6×6 надо отметить 6 клеток. При розыгрыше лотереи называют 6 «чёрных» (проигрышных) клеток. Билет считаем выигрышным, если на нём не отмечено ни одной чёрной клетки. Какое наименьшее число билетов нужно купить, чтобы наверняка среди них был хоть один выигравший?

Решите эту задачу для карточки размером $k \times k$, из которых надо отмечать k, при чётном k. *С.И.Токарев. Осенний тур Турнира городов 1996 года.* *Решение — в №4–1997*

1586. Из некоторого прямоугольника вырезан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин находится в вершине прямоугольника, а две другие лежат на сторонах прямоугольника, не содержащих эту вершину. Докажите, что площадь одного из оставшихся прямоугольных треугольников равна сумме площадей двух других.
А.А.Егоров. *Решение — в №5–1997*

1587. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{1-ay}{a-y}, \\ \dfrac{x-y}{1-xy} = \dfrac{1-bx}{b-x}, \end{cases}$$
где a и b — данные положительные числа. *М.А.Волчкевич и А.А.Егоров. Заочный тур Соросовской олимпиады.* *Решение — в №5–1997*

1588. Два чеканщика играют в следующую игру. Они по очереди чеканят новые монеты достоинством в целое число рублей каждая. При очередном ходе не разрешено чеканить монету в один рубль, а также монету, которая уже отчеканена, или достоинство которой можно получить как сумму достоинств любых нескольких (не обязательно разных) уже отчеканенных монет. Проигрывает тот, кто не может отчеканить новую монету.

а) Докажите, что игра не может длиться бесконечно.

б) Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?
Дирк Шляйхер. *Решение — в №5–1997*

1589. Для любой раскраски плоскости в 5 цветов есть две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от 1 не более чем на 0,001. Докажите это.
А.Я.Канель. *Решение — в №5–1997*

1590. На границе круглого острова расположены по очереди четыре порта: 1, 2, 3 и 4. На этом острове имеется плоская сеть дорог с односторонним движением, не имеющая кольцевых маршрутов: выехав из какого-либо порта или с развилки дорог, нельзя вернуться в этот же пункт снова. Для любых двух портов m и n обозначим через f_{mn} количество различных путей из порта m в порт n.

а) Докажите неравенство $f_{14}f_{23} \geqslant f_{13}f_{24}$.

б) Предположим, что на окружности острова шесть портов: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, перечисленных по часовой стрелке. Докажите неравенство $f_{16}f_{25}f_{34} + f_{15}f_{24}f_{36} + f_{14}f_{26}f_{35} \geqslant f_{16}f_{24}f_{35} + f_{15}f_{26}f_{34} + f_{14}f_{25}f_{36}$.
С.В.Фомин. Осенний тур Турнира городов 1996 года. *Решение — в №5–1997*

1591. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK. Оказалось, что KL — биссектриса треугольника AKC. Найдите величину угла BAC.
С.И.Токарев. Весенний тур Турнира городов 1997 года. *Решение — в №6–1997*

1592. Представимо ли число 1997^{1997} в виде суммы кубов нескольких подряд идущих целых чисел? *А.А.Егоров. Весенний тур Турнира городов 1997 года.* *Решение — в №6–1997*

1593. Имеется набор гирек: а) 1, 2, 4, 8 и 16 граммов; б) 1, 2, 4, ..., $2^9 = 512$ граммов. Разрешено класть гири на обе чаши весов. Какие грузы можно взвесить наибольшим числом способов?

А.В.Шаповалов, А.Кулаков и Н.Б.Васильев. Весенний тур Турнира городов 1997 года. *Решение — в №6–1997*

1594. Известно, что $f(xf(y)) = f(x)y$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. а) Докажите тождество $f(xy) = f(x)f(y)$.

б) Придумайте три функции, удовлетворяющие условиям задачи.

А.Герко и В.А.Сендеров. *Решение — в №6–1997*

1595. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Если $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle OAC = 40^\circ$, $\angle OCA = 30^\circ$. Найдите величину угла BOC.

Г.А.Гальперин. Весенний тур Турнира городов 1997 года. *Решение — в №6–1997*

1596. Непрерывная функция f, определённая на отрезке $[0;5]$, удовлетворяет равенству $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке есть такие числа a и b, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ и $b - a = 2$ или 3.

В.В.Произволов. *Статья В.В.Произволова и А.В.Спивака «Усреднение по окружности» первого номера 1998 года*

1597. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $abc = 1$. Докажите неравенства а) $\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geqslant 1$; б) $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqslant 1$.

Г.А.Гальперин и В.А.Сендеров. Весенний тур Турнира городов и Московская олимпиада 1997 года. *Решение — в №1–1998*

1598. Пусть $n > 1$, $1 + x + \ldots + x^{n-1} = F(x)G(x)$, где F и G — многочлены с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что

а) все коэффициенты этих многочленов — нули и единицы.

б) один из многочленов $F(x)$ и $G(x)$ представим в виде $(1 + x + \ldots + x^k)T(x)$, где $k > 0$, а коэффициенты многочлена T — нули и единицы.

М.Н.Вялый и В.А.Сендеров. Весенний тур Турнира городов и Московская олимпиада 1997 года. *Статья В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Многочлены деления круга» первого номера 1998 года*

1599. Из последовательности 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ... первых цифр степеней числа 2 выбираем несколько цифр подряд и записываем их в обратном порядке. Докажите, что эти цифры встретятся, начиная с некоторого места, подряд в последовательности первых цифр степеней числа 5.

А.Я.Канель. Московская олимпиада 1997 года. *Решение — в №1–1998*

1600. На плоскости дан круг диаметра 1 и несколько полос, сумма ширин которых равна 100. Докажите, что полосы можно параллельно передвинуть так, чтобы они покрыли круг.

М.В.Смуров. Весенний тур Турнира городов и Московская олимпиада 1997 года. *Статья М.В.Смурова и А.В.Спивака «Покрытия полосками» четвёртого номера 1998 года*

1601. f — нечётная возрастающая функция. Докажите для любых чисел a, b и c, сумма которых равна 0, неравенство $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leqslant 0$.

В.В.Произволов и Н.Б.Васильев. LX московская олимпиада. *Решение — в №1–1998*

1602. В вершинах выпуклого 1997-угольника расположены 1997 фишек. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Могли ли после а) 9; б) 10 ходов все фишки оказаться на одной прямой?

М.А.Евдокимов. LX московская олимпиада. *Решение — в №1–1998*

1603. Обозначим $(x)_+ = \max\{x, 0\}$. а) Площадь пересечения квадрата, заданного неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, с полуплоскостью $ax + by \leqslant c$, где a, и

b — положительные числа, равна $\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right)/(2ab)$. Докажите это.

б) Выведите аналогичную формулу для объёма пересечения куба, заданного неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ и $0\leqslant z\leqslant 1$, с полупространством, заданным неравенством $ax+by+cz\leqslant d$, где a, b и c — положительные числа.

А.Я.Канель и А.К.Ковальджи. LX московская олимпиада. Решение — в №1–1998

1604. Внутри выпуклого многоугольника F расположен выпуклый многоугольник G. Хорду многоугольника F — отрезок с концами на границе многоугольника F — называют опорной к многоугольнику G, если хорда пересекает G только по границе: либо по одной вершине, либо по одной стороне. Докажите существование а) по крайней мере одной опорной хорды, середина которой лежит на границе многоугольника G; б) по крайней мере двух таких хорд.

В.Дольников и П.Пушкарь. Весенний тур Турнира городов. Решение — в №1–1998

1605. На n карточках написаны попарно различные числа. Карточки разложены на столе по кругу числами вниз. Разрешено перевернуть всего не более k карточек. Докажите, что можно найти такие три подряд идущие карточки, что число, написанное на средней из них, больше двух остальных, при а) $n=5$ и $k=4$; б) $n=76$ и $k=10$; в) $n=199$ и $k=12$.

В.Ю.Протасов и А.А.Заславский. Очный тур Соросовской олимпиады. Решение — в №1–1998

1606. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE с концами на сторонах AB и BC, параллельный стороне AC и видимый из середины стороны AC под прямым углом.

Десятилетний Р.Травкин, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров. Решение — в №2–1998

1607. Корень трёхчлена ax^2+bx+b умножили на корень трёхчлена ax^2+ax+b и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

С.Берлов и В.А.Сендеров. Санкт-Петербургская олимпиада, 1997 год. Решение — в №2–1998

1608. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушать более трёх оскорбительных для его страны песен.

Ф.Л.Назаров. Санкт-Петербургская олимпиада, 1997 год. Решение — в №2–1998

1609. Пусть $P(x)$ — а) квадратный трёхчлен; б) многочлен чётной степени с неотрицательными коэффициентами. Для любых действительных чисел x и y докажите неравенство $(P(xy))^2\leqslant P(x^2)\cdot P(y^2)$.

Е.Малинникова и Н.Б.Васильев. XXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1998

1610. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или чёрного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех других мудрецов, но не видит цвет своего колпака. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешено говорить только один раз). После этого король исключает из Совета всех, не угадавших цвет своего колпака. Могут ли мудрецы накануне переаттестации договориться, чтобы все, кроме быть может одного, избежали исключения?

К.П.Кноп и Н.Б.Васильев. XXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1998

1611. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Точки M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

Д.А.Терёшин. XXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–1998

1612.* В клетках таблицы размером 10×10 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$ так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называем соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.) *Д.Храмцов и Д.Фон-дер-Флаас. XXIII Всероссийская олимпиада. Поправка к условию — на странице 31 первого номера 1998 года.* *Решение — в №2–1998*

1613. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешено выполнять следующие действия:

- снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;
- снять два камня с клетки номер n и положить по одному камню в клетки с номерами $n+1$ и $n-2$.

Докажите, что при любой последовательности мы достигнем ситуации, когда ни одно из указанных действий выполнить нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий, а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам. *Д.Фон-Дер-Флаасс. XXIII Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2–1998*

1614. На плоскости расположены $2n+1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ остроугольных треугольников, стороны которых лежат на данных прямых. *С.Иванов. Санкт-Петербургская олимпиада.* *Решение — в №2–1998*

1615. В прямоугольную коробку размером $m \times n$, где m и n нечётны, уложены кости домино размерами 1×2 так, что остался не покрытым только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, то эту доминошку разрешено сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом откроется новая дырка). Докажите, что с помощью таких операций можно перегнать дырку в любой другой угол. *А.В.Шаповалов и Н.Б.Васильев.* *Решение — в №2–1998*

1616. Дана правильная пирамида $ABCD$ с плоскими углами α при вершине D. Плоскость, параллельная основанию, пересекает рёбра DA, DB и DC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезали по пяти рёбрам A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. Полученную развёртку уложили на плоскость. При каких α развёртка будет (частично) накрывать сама себя? *Н.П.Долбилин. Соросовская олимпиада 1997 года.* *Решение — в №3–1998*

1617.* Дан правильный шестиугольник со стороной 100. Каждая его сторона разделена на 100 равных частей, и через точки деления проведены всевозможные прямые линии, параллельные сторонам шестиугольника (образующие сетку единичных правильных треугольников). Рассмотрим произвольное покрытие шестиугольника единичными ромбами, каждый из которых состоит из двух соседних треугольников сетки. Сколько существует линий сетки, разрезающих пополам (на два треугольника) а) 17; б) k ромбов (для каждого натурального k)? Зависит ли ответ от покрытия? *В.Б.Алексеев и Н.Б.Васильев. Соросовская олимпиада 1997 года.* *Решение — в №3–1998*

1618.* В вершины правильного n-угольника из его центра проведены n векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (два вектора, симметричных относительно центра, считаем правильным «двуугольником»), если n равно а) 6; б) 8; в) 9; г) 12.

д) Для любого ли натурального n верно аналогичное утверждение?

В.А.Сендеров. *Решение — в №3–1998. Статья «Многочлены деления круга» первого номера 1998 года*

1619*. Числа x, y и z удовлетворяют равенствам $x^2+xy+y^2=3$ и $y^2+yz+z^2=16$. Найдите наибольшее возможное значение величины $xy+yz+zx$.

М.А.Волчкевич и В.А.Сендеров. *Решение — в №3–1998*

1620*. Через точку O плоскости проведены n прямых, делящих плоскость на $2n$ углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки O. Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча OA_1. Для произвольно выбранной на луче OA_1 точки M_1 строится ломаная $M_1M_2M_3\ldots M_{2n}M_{2n+1}$, вершина M_k которой при любом $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ лежит на луче OA_k, вершина M_{2n+1} — снова на луче OA_1, а звено M_kM_{k+1} касается той из рассматриваемых окружностей, что вписана в угол A_kOA_{k+1}. Докажите для а) $n=3$; б) любого натурального n, что если для некоторой точки M_1 ломаная оказалась замкнутой (то есть $M_{2n+1}=M_1$), то она получится замкнутой при любом выборе точки M_1.

При некотором положении точки M_1 (или, аналогично, M_k) — а именно, если OM_1 больше 1,— касательная прямая, проведённая к окружности из точки M_1 (отличная от OM_1), пересекает не луч OA_2, а прямую OA_2 по другую сторону от O — эту точку следует считать точкой M_2 (и из неё проводить касательную к окружности, вписанной в угол A_2OA_3); таким образом, ломаная может получиться не только невыпуклой, но и самопересекающейся. Возможен и случай, когда проведённая из M_1 касательная параллельна OA_2 — тогда точку M_2 следует считать бесконечно удалённой и следующую касательную проводить параллельно OA_2. Впрочем, если точка M_1 выбрана на отрезке OA_1, то есть если $OM_1<1$, то подобные оговорки не нужны.

Н.Б.Васильев. *Решение — в №3–1998*

1998 год

1621. а) Заданы длины a и b двух сторон треугольника. Какой должна быть длина c третьей стороны, чтобы точки касания третьей стороны со вписанной и описанной окружностями делили третью сторону на три равные части?

б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условию пункта а)? *Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1998*

1622. Пусть $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, представимых в виде $2^m - 1$, где $m \in \mathbb{N}$, или в виде суммы нескольких различных чисел такого вида. Рассмотрим первые n натуральных чисел. Каких чисел среди них больше: принадлежащих множеству K или не принадлежащих, если а) $n = 1000$; б) n — произвольное натуральное число? *Б.Кукушкин, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1998*

1623. Обозначим буквой H точку пересечения высот, а буквами O и I — центры вписанной и описанной окружностей некоторого треугольника.

а) Если величина одного из углов треугольника равна 60°, то $OI = IH$. Докажите это.

б*) Следует ли из равенства $OI = IH$, что величина хотя бы одного из углов треугольника равна 60°? *А.П.Савин, Н.Б.Васильев и В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–1998*

1624*. Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, ..., A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи: а) $n = 4$; б) $n = 8$; в*) $n = 6$; г) $n = 5$ или 7; д*) $n > 8$. *М.Ю.Панов.* *Статья М.Ю.Панова и А.В.Спивака «Вписанные многоугольники» первого номера 1999 года*

1625. Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целыми координатами. Квадраты раскрашены в шахматном порядке. Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматриваем прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. $S_ч$ — площадь чёрной части треугольника, $S_б$ — площадь его белой части, $f(m, n) = |S_ч - S_б|$.

а) Вычислите $f(m, n)$ для всех натуральных чисел m и n, для которых сумма $m + n$ чётна.

б) Для любых натуральных чисел m и n докажите неравенство $f(m, n) \leqslant \frac{1}{2}\max\{m, n\}$.

в) Не существует такого числа C, что $f(m, n) < C$ для любых натуральных чисел m и n. Докажите это.

И.Воронович. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложила Белоруссия. *Решение — в №4–1998*

1626. В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят описанную окружность треугольника на две дуги. U — внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекает прямую AU в точках V и W соответственно. Докажите равенство $AU = TB + TC$.

Д.А.Терёшин. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложила Великобритания. *Решение — в №4–1998*

1627. Если числа x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяют равенству $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ и неравенствам $|x_k| \leqslant \frac{n+1}{2}$, где $k = 1$, 2 ..., n, то существует такая перестановка y_1, y_2, ..., y_n чисел x_1, x_2, ..., x_n, что $|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}$. Докажите это.

О.Богопольский. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложила Россия. *Решение — в №4–1998*

1628. Таблицу размером $n\times n$, заполненную числами от 1 до $2n-1$, назовём серебряной, если для любого натурального числа $m \leqslant n$ объединение чисел m-й строки и m-го столбца совпадает с множеством первых $2n-1$ натуральных чисел. Докажите, что а) не существует серебряной таблицы для $n=1997$; б) существует бесконечно много серебряных таблиц.

Д.А.Терёшин. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложил Иран. *Решение — в №4–1998*

1629. Решите в натуральных числах уравнение $x^{y^2}=y^x$.

Д.А.Терёшин. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложила Чехия. *Решение — в №4–1998*

1630. Для любого натурального n обозначим через $f(n)$ количество способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаем одинаковыми. (Например, $f(4)=4$, ибо число 4 можно представить четырьмя способами: $4=2+2=2+1+1+1=1+1+1+1$.) Докажите для любого натурального $n \geqslant 3$ неравенства $2^{n^2/4}<f(n)<2^{n^2/2}$.

Д.А.Терёшин. XXXVIII международная олимпиада, задачу предложила Литва. *Решение — в №4–1998*

1631. Верны ли следующие утверждения:

а) если многоугольник можно разбить ломаной на два конгруэнтных многоугольника, то его можно разбить на два конгруэнтных многоугольника отрезком;

б) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два конгруэнтных многоугольника, то его можно разбить на два конгруэнтных многоугольника отрезком;

в) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два конгруэнтных многоугольника, один из которых можно перевести в другой движением, сохраняющим ориентацию, то есть поворотом или параллельным переносом, то исходный многоугольник можно разбить отрезком на два конгруэнтных многоугольника, один из которых можно перевести в другой движением, сохраняющим ориентацию?

С.В.Маркелов. Осенний турнир городов 1998 года. *Решение — в №5–1998*

1632. Некоторые грани кубика белые, а некоторые чёрные. Площадь его грани равна площади клетки шахматной доски. Кубик поставили на одну из клеток и прокатили по доске так, что он побывал на каждой клетке по одному разу. Могло ли случиться, что всё время цвета клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали?

А.В.Шаповалов и А.В.Спивак. Осенний турнир городов 1998 года. *Решение — в №5–1998*

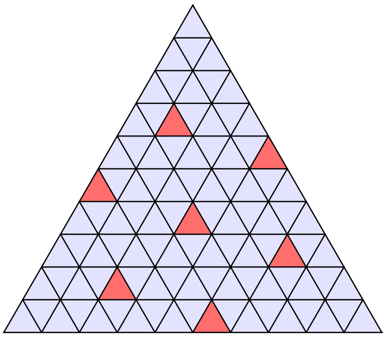
1633. CM и BN — медианы треугольника ABC, P и Q — такие точки на сторонах AB и AC, что биссектриса угла ACB является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла ABC — биссектрисой угла NBQ. Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный, если а) $BP=CQ$; б) $AP=AQ$; в) $PQ \parallel BC$?

В.А.Сендеров. Осенний турнир городов 1998 года. *Решение — в №5–1998*

1634. а) На плоскость положили (с перекрытиями) несколько салфеток, имеющих форму правильного а) шестиугольника; б) пятиугольника, причём все салфетки получаются одна из другой параллельными переносами. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей, чтобы все салфетки были прибиты, причём каждая — одним гвоздём?

А.Я.Канель. Осенний турнир городов 1998 года. *Решение — в №5–1998*

1635*. Каждая сторона треугольника разбита на n равных отрезков. Через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Они разбили треугольник на n^2 маленьких треугольничков. Какое наибольшее число треугольничков можно отметить, чтобы никакие два отмеченных треугольничка не были расположены между двумя соседними параллельными



прямыми, если а) $n=10$; б) $n=9$? (На рисунке для $n=10$ отмечены 7 треугольников.)

Р.Г.Женодаров. Осенний турнир городов 1998 года. Решение — в №5–1998

1636. Если вокруг трапеции нельзя описать окружность, то трапеция, образованная серединными перпендикулярами к её сторонам, подобна исходной. Докажите это.

В.Кириенко. Решение — в №6–1998

1637. Квадрат разрезали на прямоугольники. Докажите, что сумма длин наименьших сторон всех этих прямоугольников не меньше длины стороны квадрата.

В.В.Произволов. LXI московская олимпиада. Решение — в №6–1998

1638. Красный квадрат покрыт более чем 100 равными ему белыми квадратами. Стороны всех белых квадратов параллельны сторонам красного. Можно ли удалить один белый квадрат так, чтобы оставшиеся всё ещё покрывали красный квадрат?

С.Агеев и В.В.Произволов. LXI московская олимпиада. Решение — в №6–1998

1639. Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители селения встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа слева, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю всех жителей составляют правдивые. Определите, чему она равна.

Б.Р.Френкин. LXI московская олимпиада. Решение — в №6–1998

1640. Внутри четырёхугольника $ABCD$ существует такая точка M, что AMB и CMD — равнобедренные треугольники с углом величиной 120° при вершине M. Докажите существование такой точки N, что треугольники BNC и DNA равносторонние.

И.Ф.Шарыгин. Решение — в №6–1998

1641. Есть n камней и полубесконечная полоска бумаги, разделённая на клетки с номерами 1, 2, 3, ... На первой клетке камень лежит всегда. Разрешено положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^n-1 камень положить можно.

А.Х.Шень и М.Н.Вялый. LXI московская олимпиада. Решение — в №1–1999

1642. Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 объявлены перегородками. Расстановку перегородок назовём хорошей, если доска остаётся связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, не перепрыгивая через перегородки), и плохой — в противном случае. Каких расстановок больше — хороших или плохих?

А.В.Шаповалов. Решение — в №6–1998

1643. а) Существуют ли такие целое ненулевое число a и целое число b, что для любого натурального n число $a\cdot n!+b$ является квадратом целого числа?

б) Существуют ли такие целые ненулевые числа a и b и такое целое число c, что для любого натурального n существует такое целое число x, что $n!=ax^2+bx+c$?

А.А.Егоров. Решение — в №6–1998

1644. Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, состоящей из 52 карт, вытаскивает 5 карт произвольным образом и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую а) выкладывает среди остальных четырёх, но картинкой вниз; б*) берёт себе. Второй, глядя на лежащие перед ним карты, называет пятую карту. Научите их это делать!

Г.А.Гальперин. Решение — в №6–1998

1645. Количество способов, которыми можно расставить n чисел, где $n>9$, в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n. Докажите это.

А.Я.Канель. LXI московская олимпиада. Решение — в №6–1998

1646. У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то оказалось не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берёт себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то один из них раскулачивает другого. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.
А.В.Шаповалов. Зональный тур Всероссийской олимпиады 1998 года. *Решение — в №1–1999*

1647. Из любого конечного множества точек плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. Докажите это. (Диаметр — это максимальное расстояние между точками множества.)
В.Дольников. Зональный тур Всероссийской олимпиады 1998 года. *Решение — в №1–1999*

1648*. Из центра правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса 1, в некоторые вершины этого многоугольника проведены векторы. Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б*) $\sqrt{1998}$?
В.А.Сендеров и А.В.Спивак. Отборочный тур московской олимпиады 1998 года на Всероссийскую олимпиаду. *Решение — в статье «Гауссовы суммы» 1999 год*

1649*. На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятые на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашёлся язык, общий для её членов. *А.А.Берзиньш, А.В.Спивак и Г.Р Челноков. Отборочный тур московской олимпиады 1998 года на Всероссийскую олимпиаду.* *Решение — в №1–1999*

1650*. На плоскости нарисовано дерево (то есть граф без циклов) Γ. Граф Γ', полученный из Γ параллельным переносом на некоторый вектор длины 1, не пересекается с Γ. На графе Γ отмечены две точки A и B, в которых в начальный момент времени сидело по жуку. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках A и B, но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент расстояние между жуками было меньше 1. *А.Б.Скопенков и Г.Р.Челноков. Отборочный тур московской олимпиады 1998 года на Всероссийскую олимпиаду.* *Решение — в №1–1999*

1651. Найдите а) наименьшую; б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ox, Oy и биссектрису первого и третьего квадрантов суть отрезки единичной длины. *В.Тиморин.* *Решение — в №2–1999*

1652. Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом — окружности ω_n. Найдите радиус окружности ω_{1998}, если диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в начале координат.
М.А.Евдокимов. Всероссийская олимпиада 1998 года. *Решение — в №2–1999*

1653. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешено любые три из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое их перевели, назовём временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать? *О.Подлипский. Всероссийская олимпиада 1998 года.* *Решение — в №2–1999*

1654. Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравнобедренного треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E. Докажите, что угол BDE прямой.
М.Сонкин, А.Акопян и В.А.Сендеров. Всероссийская олимпиада 1998 года. *Решение — в №2–1999*

1655. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на квадрат их разности?
Г.А.Гальперин. Всероссийская олимпиада 1998 года. *Решение — в №2–1999*

1656. Даны два выпуклых многоугольника. Расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а квадрат расстояния между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше $1/2$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.

В.Дольников. Всероссийская олимпиада 1998 года. Решение — в №2–1999

1657. Назовём лабиринтом шахматную доску, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде НАПРАВО ладья смещается на одно поле направо или, если справа находится край доски или перегородка, стоит на месте; аналогично определим команды НАЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Мария Ивановна пишет программу — конечную последовательность команд — и даёт её Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и ставит ладью на любое поле. Может ли Мария Ивановна сочинить такую программу, что ладья обойдёт все доступные поля лабиринта при любом выборе Вовочки?

В.А.Уфнаровский и А.В.Шаповалов. Всероссийская олимпиада 1998 года. Решение — в №2–1999

1658. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр десятичной записи числа x. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что $s(a+b)<5$, $s(b+c)<5$ и $s(a+c)<5$, но $s(a+b+c)>50$?

С.Г.Волчёнков и Л.Медников. Всероссийская олимпиада 1998 года. Решение — в №2–1999

1659*. Фигура F, составленная из клеток размером 1×1, обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника размером $m\times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру F можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках так расположенной фигуры F была положительна (фигуру F можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник можно покрыть фигурой F в несколько слоёв.

А.Я.Канель. Всероссийская олимпиада 1998 года. Решение — в №2–1999

1660*. В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать таким образом, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в незакрытых городах.

Д.Карпов и Р.Карасёв. Всероссийская олимпиада 1998 года. Решение — в №2–1999

1661. Можно ли отметить 64 единичных кубика в кубе размером $8\times 8\times 8$ так, чтобы среди любых 8 отмеченных кубиков нашлись два кубика, расположенные в одном слое, параллельном некоторой грани куба, и при этом в каждом слое, параллельном грани, было отмечено 8 кубиков?

А.Вершик. Санкт-Петербургская олимпиада 1998 года. Решение — в №3–1999

1662. Может ли десятичная запись куба натурального числа начинаться с цифр 1998?

В.А.Сендеров. Решение — в №3–1999

1663. Биссектрисы вписанного четырёхугольника образуют в пересечении выпуклый четырёхугольник. Докажите, что диагонали полученного четырёхугольника перпендикулярны.

С.Берлов. Санкт-Петербургская олимпиада 1998 года. Решение — в №3–1999

1664. Существует ли натуральное число $k>1$ и такой отличный от константы многочлен P с целыми коэффициентами, что каждые два из чисел $P(k)$, $P(k^2)$, $P(k^3)$, ... взаимно просты?

А.Пастор. Санкт-Петербургская олимпиада 1998 года. Решение — в №3–1999

1665. а) В сферу вписаны несколько кубов. Каждые три из них имеют хотя бы одну общую вершину. Докажите, что все кубы имеют хотя бы одну общую вершину.

б*) Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют хотя бы одну общую вершину. Обязательно ли все четыре куба имеют хотя бы одну общую вершину?

В.В.Произволов. Решение — в №3–1999

1999 год

1666. Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них есть хотя бы 4 параллелепипеда, объём каждого из которых не превосходит 1/4. *Д.Ю.Кузнецов.* *Решение — в №4–1999*

1667. Натуральный ряд разбит на два бесконечных множества чисел. Докажите, что сумма некоторых 100 чисел одного из этих множеств равна сумме некоторых 100 чисел другого множества. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–1999*

1668. Имеется n бочек, содержащих 1, 2, ... , n литров воды соответственно. Разрешено доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а) $n = 10$; б) n — любое натуральное число? *Р.Г.Женодаров и Г.Р.Челноков.* *Решение — в №4–1999*

1669. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства НОК$[a, b]$ = НОК$[b, c]$ = НОК$[c, a]$. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–1999*

1670. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри четырёхугольника. Докажите, что около $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.
И.Анно. XXXIX международная олимпиада, задачу предложил Люксембург. *Решение — в №4–1999*

1671. На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b — нечётное число, не меньшее 3. За выступление каждого участника каждый судья ставил оценку лплюсм или «минус». Число k таково, что для любых двух судей существует не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство $2bk \geqslant a(b-1)$.
Д.Шаповалов. XXXIX международная олимпиада, задачу предложила Индия. *Решение — в №4–1999*

1672. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные числа k, представимые в виде $k = \tau(n^2)/\tau(n)$. *В.Дрёмов и Н.Дуров. XXXIX международная олимпиада, задачу предложила Белоруссия.* *Решение — в №4–1999*

1673*. Точка, расположенная внутри равностороннего треугольника, соединена отрезками с его вершинами. Из этой же точки опущены перпендикуляры на стороны треугольника. Шесть проведённых таким образом отрезков разделили треугольник на шесть прямоугольных треугольников. Покрасим их попеременно в красный и синий цвета. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–1999*

1674. Функция f определена на множестве натуральных чисел. Сумма $f(f(n)) + f(n)$ для любого чётного числа n равна $2n - 1$, а для любого нечётного n равна $2n + 1$. Найдите $f(1999)$. *В.Кириак.* *Решение — в №4–1999*

1675*. Тетраэдр $ABCD$, где $AB = CD = 2$ и $AC = BC = AD = BD = \sqrt{3}$, можно разрезать на а) 8; б) 27 подобных ему и равных один другому тетраэдров. Докажите это.
А.А.Заславский. *Решение — в №4–1999*

1676. Отрезок AB разбит на чёрные и белые отрезки так, что сумма длин чёрных отрезков равна сумме длин белых отрезков. Для каждого чёрного отрезка вычисляем произведение его длины на расстояние от точки A до его середины и такие произведения складываем. Для каждого белого отрезка тоже вычисляем произведение его длины на расстояние от точки B до его середины и такие произведения складываем. Докажите, что «белая» и «чёрная» суммы равны. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–1999*

1677. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, B и O, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, C и O, касается прямой CD.
А.А.Заславский. Московская олимпиада 1999 года. Решение — в №5–1999

1678. В таблице размером $n \times n$ в каждой строке и в каждом столбце в трёх клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Для каждой строки перемножим её числа и полученные n произведений сложим. Аналогично, перемножим числа в каждом столбце и сложим полученные n произведений. Докажите, что «строчная» и «столбцовая» суммы равны. *В.В.Произволов.* Решение — в №5–1999

1679. Последовательности a_0, a_1, a_2, ... и b_0, b_1, b_2, ... определим следующим образом. В качестве a_0 берём любое положительное число, а в качестве b_0 — любое отрицательное число. Для любого натурального числа n числа a_n и b_n — это, соответственно, положительный и отрицательный корень уравнения $x^2 + a_{n-1}x + b_{n-1} = 0$. Найдите пределы обеих последовательностей.
А.А.Заславский и А.Поспелов. Решение — в №5–1999

1680. Пусть C — натуральное число. Рассмотрим последовательность, n-й член которой равен $n^3 + C$.

а) Наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих её членов равен 1. Докажите это.

б) Пусть C — куб натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в*) Существует ли такое натуральное число C, что любые два соседних члена последовательности взаимно просты? *В.А.Сендеров.* Решение — в №5–1999

1681. Квадрат целого числа оканчивается так: ... 21. Может ли третья справа цифра этого квадрата быть чётной? *В.А.Сендеров.* Решение — в №6–1999

1682. Из некоторой точки плоскости опущены перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному. *Р.Кудимов.* Решение — в №6–1999

1683. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что количество способов такого выбора есть ненулевая степень двойки. *А.Гришин. Турнир городов 1998 года.* Решение — в №6–1999

1684*. Круг разделён радиусами на $2n$ конгруэнтных секторов, n из которых синие, а остальные — красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны натуральные числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны числа от 1 до n. Докажите существование полукруга, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n. *В.В.Произволов. Московская олимпиада 1999 года.* Решение — в №6–1999

1685. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведённые через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.
И.З.Вайнштейн. Решение — в №6–1999

1686. Функции f и g непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и удовлетворяют равенствам $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1$ и $\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\,dx = \sqrt{2}$. Докажите равенство $f = g$.
В.В.Произволов. Решение — в №1–2000

1687. Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли в некотором прямоугольном параллелепипеде поместиться больший по размеру прямоугольный параллелепипед?
А.Х.Шень. Турнир городов 1998 года. Решение — в №1–2000

1688.* Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$, где трёхчлены x^2+ax+b и x^2+cx+d не имеют общих корней. Докажите равносильность следующих утверждений:

- существует интервал, свободный от значений функции f;
- функцию f можно представить в виде композиции линейных функций, возведения в квадрат $x\mapsto x^2$ и взятия обратного $x\mapsto\frac{1}{x}$.

А.Я.Канель. Турнир городов 1998 года. Решение — в №1–2000

1689. Рассмотрим произведение трёх натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию, являющееся делителем некоторого числа вида n^2+1, где $n\in\mathbb{N}$.

а) Докажите существование такой арифметической прогрессии с разностью 12.

б) Докажите несуществование такой прогрессии с разностью 10 или 11.

в*) Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?
В.А.Сендеров. Решение — в №1–2000

1690. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные — синие, причём каждая синяя грань — вписанный многоугольник. Докажите, что и красная грань — вписанный многоугольник.
В.В.Произволов. Решение — в №1–2000

1691. Любой четырёхугольник можно разрезать на 3 трапеции. Докажите это.
В.В.Произволов. LXII московская олимпиада, 1999 год. Решение — в №1–2000

1692. Числа a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

В.А.Сендеров и Г.Карнаух. LXII московская олимпиада, 1999 год. Решение — в №1–2000 и на странице 24 «Кванта» №3–2005

1693. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую в точках A и B, вторую — в точках C и D. Докажите равенство углов AQD и BQC. *А.А.Заславский. LXII московская олимпиада, 1999 год.* Решение — в №1–2000

1694. Парабола $y=-x^2+b_1x+c_1$ и парабола $y=-x^2+b_2x+c_2$ касаются параболы $y=ax^2+bx+c$, где $a>0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.
Р.Карасёв. Решение — в №1–2000

1695. Грани правильного тетраэдра окрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей чёрных граней равна сумма расстояний до плоскостей белых граней.
Д.А.Терёшин. LXII московская олимпиада, 1999 год. Решение — в №1–2000

1696. Рёбра графа покрашены n красками так, что из каждой вершины выходит по одному ребру каждого цвета. Для любого цвета по рёбрам этого цвета можно добраться от любой вершины графа до любой другой. Докажите, что какие бы $n-1$ разноцветных рёбер графа ни уничтожить, граф останется связным.
Д.Карпов. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2000

1697. Сумма цифр десятичной записи числа n равна 100, а сумма цифр десятичной записи числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр десятичной записи числа $3n$?
А.С.Голованов. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2000

1698. На сторонах AB, BC и CA расположены точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что если длины отрезков AA', BB' и CC' не превосходят 1, то площадь треугольника ABC не превосходит $1/\sqrt{3}$.
В.А.Сендеров. Решение — в №2–2000

1699. Для любого натурального n докажите неравенство $\{\sqrt{1}\}+\{\sqrt{2}\}+\ldots+\{\sqrt{n^2}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$.
А.Храбров. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2000

1700*. На числовой прямой отмечены точки с координатами $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Блоха начала прыгать из точки 1 и через $2n$ рыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвратилась в точку 1. Сумма длин первых $2n-1$ прыжков равна $n(2n-1)$. Докажите, что длина последнего прыжка равна n.
В.В.Произволов. Решение — в №2–2000

1701. Если $x>0$, $y>0$ и $x^2+y^3 \geqslant x^3+y^4$, то $x^3+y^3 \leqslant 2$. Докажите это.
С.Злобин. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–2000

1702*. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 человек есть 5 попарно знакомых. Докажите, что среди этих людей есть 6 знакомых друг с другом.
В.Дольников. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–2000

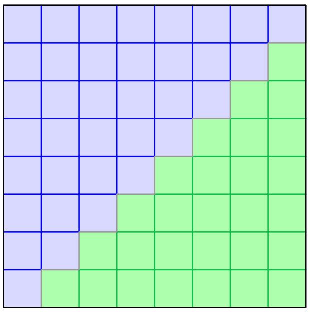
1703. Если $a^m+b^m+c^m=0$ и $a^n+b^n+c^n=0$, где m и n — натуральные числа, то $abc=0$. Докажите это.
В.В.Произволов и В.А.Сендеров. Решение — в №3–2000

1704. На бесконечной клетчатой доске в каждой клетке квадрата размером $n \times n$ стоит по одной фишке. Ход — перепрыгивание любой фишки через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой расположена пустая клетка; при этом ту фишку, через которую фишка перепрыгнула, снимаем. Докажите, что позиция, в которой невозможен ни один ход, не может возникнуть ранее чем через $[n^2/3]$ ходов.
С.И.Токарев. XXV Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–2000

1705. Через точку внутри сферы проведены три взаимно перпендикулярные плоскости, делящие сферу на 8 сферических треугольников. Докажите, что если их раскрасить в шахматном порядке, то сумма площадей 4 сферических треугольников одного цвета окажется равна сумме площадей других 4 треугольников.
В.В.Произволов. Решение — в №3–2000

1706. AL и BM — биссектрисы треугольника ABC. Одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите равенство $\angle ACB = 60^\circ$.
Е.Сопкина. Санкт-Петербургская олимпиада, 1999 год. Решение — в №3–2000

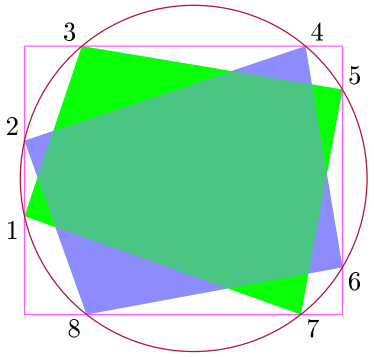
1707*. Квадрат клетчатой бумаги размером $n \times n$ разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат. Докажите, что некоторая клетка клетчатой бумаги является одним из названных прямоугольников.
В.В.Произволов. Решение — в №3–2000



1708. Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа 100!, отличные от 1 (без повторений!). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся взаимно просты в совокупности. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?
Д.Карпов. Санкт-Петербургская олимпиада, 1999 год. Решение — в №3–2000

1709. Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырёхугольника с вершинами в точках с нечётными номерами равна площади четырёхугольника с вершинами в точках с чётными номерами (другими словами, сумма площадей синих треугольников равна сумме площадей зелёных треугольников).

В.В.Произволов. Решение — в №3–2000



1710. Числа p, q, r, x, y, z положительные, причём $p+q+r=1$ и $x^py^qz^r=1$. Докажите неравенство

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\geqslant\frac{1}{2}.$$

С.Калинин. Решение — в №3–2000

2000 год

1711. В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своём месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно? *Д.А.Калинин. Костромская олимпиада.* Решение — в №4–2000

1712. а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждый четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину. *В.В.Произволов.* Решение — в №4–2000

1713. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты такие точки A', B' и C', что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Пусть D, E, F, D', E' и F' — середины отрезков AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ соответственно. Докажите, что

а) прямые DD', EE' и FF' имеют общую точку, причём эта точка, точка пересечения медиан треугольника ABC и точка пересечения прямых AA', BB' и CC' лежат на одной прямой;

б) если в качестве прямых AA', BB' и CC' взяты высоты треугольника ABC, то точка пересечения прямых DD', EE' и FF' совпадает с центром окружности девяти точек треугольника ABC;

в) если прямые AA', BB' и CC' — биссектрисы треугольника ABC, то их общая точка, точка Нагеля (точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам) и общая точка прямых DD', EE' и FF' лежат на одной прямой;

г) если прямые AA', BB' и CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE' и FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC. *И.З.Вайнштейн.* Решение — в №4–2000

1714*. Уравнение а) $(x^2+1)(y^2-1)=z^2$; б) $(x^2-1)(y^2-1)=z^2$; в*) $(x^2+1)(y^2+1)=z^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z, удовлетворяющих условию $x \neq y$. Докажите это. *В.А.Сендеров.* Решение — в №4–2000

1715. Первые $2n$ натуральных чисел записаны в виде такой последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_{2n}, что $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|=2n^2$. Докажите равенство $|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=n^2$. *В.В.Произволов.* Решение — в №4–2000

1716. Какое наименьшее число клеток можно отметить в квадрате клетчатой бумаги размером $n \times n$ так, чтобы каждая клетка квадрата, отмеченная или неотмеченная, соседствовала по стороне хотя бы с одной отмеченной клеткой? *Е.Барабанов и И.В.Воронович. XL международная олимпиада.* Решение — в №4–2000

1717*. Окружности ω_1 и ω_2 изнутри касаются окружности ω в точках M и N соответственно. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2, пересекает окружность ω в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают окружность ω_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая CD касается окружности ω_2. *П.А.Кожевников. XL международная олимпиада.* Решение — в №4–2000

1718*. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых x и y верно равенство

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

XL международная олимпиада, задачу предложила Япония. *Решение — в №4–2000*

1719. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

а) Докажите неравенство $a_{100} > 14$.

б*) Найдите $[a_{1000}]$, то есть найдите такое целое число m, что $m \leqslant a_{1000} < m + 1$.

в*) Докажите существование и найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

А.В.Спивак. *Решение — в №4–2000*

1720*. Какое наибольшее число одинаковых деревянных кубиков можно склеить между собой так, чтобы каждые два кубика были склеены по грани или по участку грани?

В.В.Произволов. *Решение — в №4–2000*

1721. Имеет ли уравнение $x^2 - 3y^2 = 2000$ решение в целых числах?

В.А.Сендеров. *Решение — в №5–2000*

1722. Числа a и b натуральные. Проведём через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

М.Ю.Панов. *Решение — в №5–2000*

1723. Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы первыми n натуральными числами. В порядке нумерации каждый вектор поворачивается по часовой стрелке и занимает положение ближайшего свободного синего вектора так, что в конце концов красные векторы займут положения синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.

В.В.Произволов. *Решение — в №5–2000*

1724. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK.

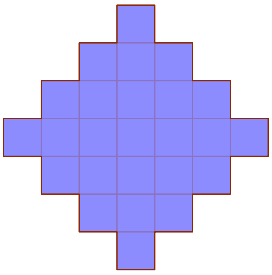
М.А.Волчкевич. *Решение — в №5–2000*

1725*. Из клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F высотой $2n + 1$ и шириной $2n + 1$ (пример для случая $n = 3$ изображён на рисунке). Докажите, что

а) фигуру F нельзя разрезать на $2n$ выпуклых фигур;

б) если фигура F разрезана на $2n + 1$ выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

В.В.Произволов. *Решение — в №5–2000*



1726. На плоскости проведены n прямых. Каждая пересекает ровно 1999 других. Найдите все возможные значения n.

Р.Г.Женодаров. Осенний Турнир городов, 1999 год. *Решение — в №6–2000*

1727. Неутомимые Фома и Ерёма строят последовательность. Начинают с произвольного натурального числа. Затем по очереди они делают следующее. Фома прибавляет к очередному числу некоторую из его цифр, а Ерёма вычитает из очередного числа некоторую из его цифр. Докажите, что хотя бы одно из чисел встретится в этой

последовательности не менее 10 раз.
А.В.Шаповалов. Осенний Турнир городов, 1999 год. *Решение — в №6–2000*

1728. Точки K и L — это точки касания сторон AC и BC треугольника ABC с его вневписанными окружностями. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков KL и AB а) делит периметр треугольника ABC пополам; б) параллельна биссектрисе угла ACB. *Л.Емельянов. Осенний Турнир городов, 1999 год.* *Решение — в №6–2000*

1729. Натуральный ряд разбит на два бесконечных подмножества так, что для любых чисел x, y и z, принадлежащих одному и тому же из этих подмножеств, сумма $x+y+z$ принадлежит тому же подмножеству. Докажите, что одно из подмножеств состоит из нечётных чисел, а другое — из чётных.
В.В.Произволов. Осенний Турнир городов, 1999 год. *Решение — в №6–2000*

1730*. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырёхугольника пересекаются в точках M и K. Через точку O пересечения диагоналей четырёхугольника проведена прямая, параллельная прямой MK. Докажите, что отрезок, заключённый внутри четырёхугольника, точка O делит пополам.
М.А.Волчкевич. Осенний Турнир городов, 1999 год. *Решение — в №6–2000*

1731. В ряд нарисованы 60 звёздочек. Два игрока по очереди заменяют звёздочки на цифры. Какую именно из оставшихся звёздочек заменять на цифру, игрок, решает игрок, делающий очередной ход. Докажите, что второй игрок может играть так, чтобы полученное число (возможно, начинающееся на цифру 0) делилось на 13.
Н.Б.Васильев и Б.Д.Гинзбург. *Решение — в №6–2000*

1732*. а) A и B — конечные подмножества некоторой прямой, состоящее не менее чем из 3 точек каждое. Если существует биекция множества всех трёхэлементных подмножеств множества A на множество всех трёхэлементных подмножеств множества B, при которой всякое трёхэлементное подмножество множества A переходит в конгруэнтное ему подмножество множества B, докажите, что множества A и B конгруэнтны.

б) Верно ли аналогичное утверждение, если вместо «трёхэлементное» в пункте а) всюду написать «двухэлементное»? *В.В.Произволов.* *Решение — в №6–2000*

1733. Непрерывная функция $f\colon [0;1] \to [0;1]$ такова, что для любого числа $x \in [0;1]$ верно равенство $f(f(x)) = x$. Докажите равенство $\int\limits_0^1 |x - f(x)|\,dx = \frac{1}{2}$.
К.Каибханов. *Решение — в №6–2000*

1734. Уравнение $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\beta} = \cos x$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет ни одного решения при $\beta <$ < 3, но имеет единственное решение при $\beta > 3$. Докажите это.
В.А.Сендеров. *Решение — в №6–2000*

1735*. Выпуклый многогранник имеет 6 вершин: по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что 8 проекций начала координат на грани многогранника лежат на одной сфере. *В.В.Произволов.* *Решение — в №6–2000*

1736. Какое наибольшее число коней можно расставить на доске размером 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?
М.Горелов. LXIII московская олимпиада. *Решение — в №1–2001*

1737. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. Точки M и N — центры описанных окружностей треугольников AKB и CKD. Докажите, что $OMKN$ — параллелограмм. *А.А.Заславский. LXIII московская олимпиада.* *Решение — в №1–2001*

1738. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту а) спрятали; б) отдали постороннему наблюдателю. Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом посторонний наблюдатель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит? *А.В.Шаповалов. LXIII московская олимпиада.* Решение — в №1–2001

1739. Для любой чётной цифры a и любой нечётной цифры b существует число, делящееся на 2^{2000}, каждая цифра которого — либо a, либо b. Докажите это.
И.Ф.Акулич и А.В.Жуков. Решение — в №1–2001

1740. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из четырёх чисел ab, bc, ca и $ab+bc+ca$ является квадратом. *В.В.Произволов.* Решение — в №1–2001

1741. С каждым из чисел от 000 000 до 999 999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю — на 6. Сумму полученных шести чисел назовём характеристикой исходного числа. Характеристики скольких чисел делятся на 7? *Н.Б.Васильев и Б.Д.Гинзбург.* Решение — в №2–2001

1742. Квадратная таблица заполнена натуральными цифрами таким образом, что всякие два числа, соседние по вертикали или горизонтали, различаются на 1. Докажите, что либо некоторое натуральное число присутствует на каждой горизонтали, либо некоторое натуральное число присутствует на каждой вертикали.
В.В.Произволов. Решение — в №2–2001

1743. Найдите $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{100}}{3}\right]$.
А.С.Голованов. XXVI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2001

1744*. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k разных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов разных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздём. Докажите, что существует такой цвет, что все квадраты этого цвета можно прибить к столу $2n-2$ гвоздями. *В.Дольников. XXVI Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2001

1745. В некоторых клетках доски размером $2n\times2n$ стоят чёрные и белые фишки. С доски сначала снимают все чёрные фишки, которые расположены в одной вертикали хотя бы с одной белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали хотя бы с одной из оставшихся чёрных. Докажите, что или чёрных фишек осталось не более n^2, или белых фишек на доске осталось не более n^2.
С.Берлов и В.В.Произволов. XXVI Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2001

1746. На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют её на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами. *В.В.Произволов.* Решение — в №2–2001

1747*. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках A', B' и C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB' и CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причём центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат соответственно на прямых AA', BB' и CC'. *А.А.Заславский.* Решение — в №2–2001

1748. На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Рассмотрим всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовём раскраску неразделимой, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что количество неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек на плоскости. *Г.Р.Челноков.* *Решение — в №2–2001*

1749. Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе — АБ, третье — АБА, четвёртое — АБААБ, пятое — АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б — на А.

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему. Например, АБААБАБА — это слово АБААБ, к которому справа приписано слово АБА.

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n — номера мест, на которых стоят n-е буквы буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБААБАБААБАБААБААБАБААБААБ . . . , начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = a_n + n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, . . . (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б — на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего её слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ . . . стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.
Е.Я.Барский, Л.М.Коганов и А.В.Спивак. *Решение — в №2–2001*

1750. а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что хотя бы один из этих бумажных квадратов целиком оклеивает некоторую грань куба.

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли хотя бы один из бумажных треугольников целиком оклеивает некоторую грань тетраэдра? *В.В.Произволов.* *Решение — в №2–2001*

1751. Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с k городами другой. Из любого города любой из этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. Никакие два города никакой одной из этих двух стран рейсы этой авиакомпании не соединяют. Одну из авиалиний закрыли. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.
О.Мельников. *Решение — в №3–2001*

1752. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на чёрные поля шахматной доски так, чтобы они не били друг друга? *В.В.Произволов.* *Решение — в №3–2001*

1753. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках A', B' и C'. Точка L — середина отрезка $A'B'$. Докажите, что угол ALB тупой.
А.А.Заславский. *Решение — в №3–2001*

1754*. Каждое натуральное число покрашено в чёрный или белый цвет. Докажите существование такой возрастающей последовательности чётных чисел a_1, a_2, a_3, . . . , что все числа a_1, $\frac{a_1+a_2}{2}$, a_2, $\frac{a_2+a_3}{2}$, a_3, $\frac{a_3+a_4}{2}$, . . . одного цвета.
В.Васильева и И.Протасов. *Решение — в №3–2001. Исправление опечатки в условии — на странице 14 первого номера 2001 года*

1755* Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол площади 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя рвать.) *В.В.Произволов.* *Решение — в №3–2001*

2001 год

1756. Среди любых трёх из нескольких данных натуральных чисел можно выбрать два, одно из которых делится на другое. Докажите, что все числа можно так покрасить двумя красками, что из любых чисел одного цвета одно делится на другое.

Е.Черепанов. Решение — в №4–2001

1757*. Если выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов, то его можно разрезать и на 15 параллелограммов. Докажите это.

В.В.Произволов. Решение — в №4–2001

1758. Всякий депутат имеет свой абсолютный рейтинг — некоторое присвоенное ему компетентными органами положительное число. Сразу после избрания депутатов распределили по фракциям и каждый из них вычислил свой относительный рейтинг — частное от деления абсолютного рейтинга на сумму абсолютных рейтингов всех (включая его самого) депутатов его фракции. Депутат может перейти из фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Ни в какой момент времени не может произойти более одного такого перехода. Докажите, что спустя конечное время переходы прекратятся. *В.Г.Ильичёв.* Решение — в №4–2001

1759. Если остроугольный треугольник можно разбить на две фигуры, диаметр каждой из которых не превосходит длины наименьшей стороны этого треугольника, то величины всех его углов не меньше 36°. Докажите это. (Диаметр фигуры — это точная верхняя грань расстояний между её точками.) *А.Эвнин.* Решение — в №4–2001

1760. Таблицу размером $n \times n$ называем удивительной, если сумма всяких n её чисел, расположенных в разных строках и разных столбцах, не зависит от того, какие именно такие числа выбраны. Докажите, что каждую удивительную таблицу можно представить в виде суммы двух таблиц, у одной из которых все строки равны, а у другой равны все столбцы.

Например, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. *В.В.Произволов.* Решение — в №4–2001

1761. У фокусника 100 карточек, занумерованных чисалми от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика — красный, белый и синий — так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка. Зритель выбирает по одной карточке из некоторых двух ящиков и сообщает фокуснику сумму номеров этих карточек. Фокусник по этой сумме сообщает, из какого ящика карточка не была взята. Сколькими способами может фокусник разложить карточки по ящикам, чтобы фокус всегда удавался? (Задать способ — указать для каждой карточки, в каком ящике ей лежать.) *Н.Х.Агаханов и А.Гайфуллин. XLI международная олимпиада, задачу предложила Венгрия.* Решение — в №4–2001

1762. Существует ли такое натуральное число n, что $2^n + 1$ делится на n, а число n имеет ровно 2000 различных простых делителей?

В.А.Сендеров и А.А.Егоров. XLI международная олимпиада. Решение — в №4–2001

1763*. AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках T_1, T_2 и T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2 и l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1 и H_1H_2 относительно прямых T_2T_3, T_3T_1 и T_1T_2 соответственно. Докажите, что каждые две из прямых l_1, l_2 и l_3 пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

Т.Емельянова, А.Гайфуллин и Д.А.Терёшин. XLI международная олимпиада. Решение — в №4–2001

1764. Функция f возрастает на $[0;1]$. Если $f(0)=0$ и для любых положительных чисел a и b, сумма которых не превосходит 1, верно неравенство $f(a)+f(b)\geqslant f(a+b)$. Докажите неограниченность последовательности $s_1=f(1)$, $s_2=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)$, ..., $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$, ...

В.Попов. *Решение — в №4–2001*

1765*. Длина ребра правильного тетраэдра равна 1. Докажите, что существуют две точки, рассстояние между которыми не превосходит 1/2, среди любых а) пяти точек, расположенных на его рёбрах; б) девяти точек, расположенных на его поверхности; в*) девяти точек, расположенных на поверхности или внутри тетраэдра.

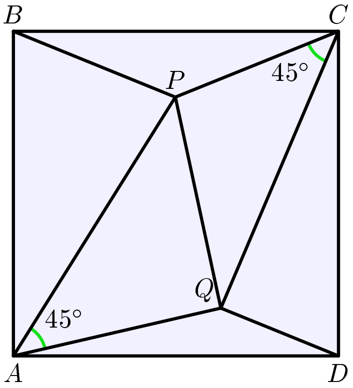
В.В.Произволов. *Решение — в №4–2001*

1766. На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно попал под шах?

А.В.Шаповалов. *Решение — в №5–2001*

1767. Внутри квадрата $ABCD$ расположены точки P и Q так, что $\angle PAQ=\angle PCQ=45^\circ$. Докажите равенство $PQ^2=BP^2+QD^2$.

В.В.Произволов. *Решение — в №5–2001. Комментарий — в задаче М1803*



1768*. а) Расположите первые 100 натуральных чисел в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма номеров занятых ими мест не равнялась сумме самих этих чисел.

б*) При посадке в аэробус пассажиры сели куда попало. Все места оказались заняты, а для любого множества, в котором не более 100 пассажиров, среднее арифметическое номеров занятых ими мест не менее чем на 1 отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в билетах. Каково наименьшее возможное число мест в аэробусе?

С.И.Токарев. *Решение — в №5–2001*

1769*. Концы $2n$ непересекающихся хорд разделили окружность на $4n$ равных дуг. Докажите, что среди этих хорд существуют две параллельные.

В.В.Произволов. *Решение — в №5–2001*

1770. Дан многочлен степени 10 с целыми коэффициентами. Двое по очереди заменяют заменяют буквы на числа (каждым ходом — одну букву на одно число). После десятого хода получают некоторый многочлен f с числовыми коэффициентами. Если $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 0} f(x)<\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$, то победил первый игрок, а если $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 0} f(x)>\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$, то второй. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Н.Б.Васильев и Б.Д.Гинзбург. *Решение — в №5–2001*

1771. В результате деления числа, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, на число 3^n получили число m. Докажите, что число m целое и его можно разложить на n различных и отличных от 1 натуральных множителей.

Д.Мамедьяров и А.Жуков. *Решение — в №6–2001*

1772. Каждое число последовательности a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}, a_{2n+1} равно 2, 5 или 9. При этом $a_1=a_{2n+1}$, но любые два соседних числа различны. Докажите равенство

$$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-\ldots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}=0.$$

В.В.Произволов. *Решение — в №6–2001*

1773. Проведённая из вершины C прямого угла высота CD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F. Обозначим буквой G точку пересечения прямых DE и BF. Докажите равенство площадей четырёхугольника $CEGF$ и треугольника BDG.

И.К.Жук. *Решение — в №6–2001*

1774. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. Наидлиннейшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй — третьего и так далее, состоит из 6 людоедов. Докажите, что людоедов можно так рассадить по шести комнатам, чтобы ни в какой комнате никто никого не хотел съесть.

О.Мельников. *Решение — в №6–2001. Статья А.В.Спивака «Цепи и антицепи» пятого номера 2003 года*

1775. а) Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy = \pm 1$?

б) Существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых — начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy = 1$, а четвёртая — на гиперболе $xy = -1$. Докажите это.

в) Площадь каждого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$. Докажите это.

г) Рассмотрим для любого такого параллелограмма $OABC$ порождённую им решётку, то есть множество таких точек M, что $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}$, где k, m — целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами $xy = \pm 1$, не содержит ни одной точки этой решётки, кроме начала координат.

Н.Н.Осипов. *Решение — в статье В.А.Сендерова и А.В.Спивака «Уравнения Пелля» третьего номера 2002 года*

1776. Вчера каждый брат был в ссоре с одинаковым количеством сестёр, а каждая сестра — с различным количеством братьев. Сейчас некоторые из них помирились, и каждая сестра в ссоре с одним и тем же количеством братьев, а каждый брат — с различным количеством сестёр. Сколько сестёр и сколько братьев в этой семье?

И.Ф.Акулич и А.В.Жуков. *Решение — в №6–2001*

1777. В квадрат со стороной 1 вписан четырёхугольник. Его стороны являются гипотенузами четырёх прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не превосходит $2 - \sqrt{2}$ и равна этому числу лишь тогда, когда стороны вписанного четырёхугольника параллельны диагоналям квадрата.

В.В.Произволов. *Решение — в №6–2001*

1778*. На доске написано комплексное число $1 + i$. Разрешено любое число раз и в любом порядке выполнять следующие операции: стереть любое число $a + bi$ и записать взамен

- два раза число $a + 1 + bi$;
- три числа $a + 1 + bi$, $a + bi + i$ и $a + 1 + bi + i$;
- четыре числа, два из которых равны $a + bi + i$, а два других равны $a + 1 + bi + i$.

После нескольких таких операций оказалось, что модули всех выписанных чисел больше 3. Докажите, что среди выписанных чисел есть хотя бы два одинаковых.

И.Ф.Акулич и И.В.Воронович. *Решение — в №6–2001*

1779. Найдите все такие многочлены f, что а) для любых чисел x и y верно равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$; б) для любого x и некоторого a верно равенство $af(x) = f(2001x)$; в) для любых чисел x и y и некоторых чисел a, b, c и d верно равенство $af(x) + bf(y) = f(cx + dy)$.

В.А.Сендеров. *Решение — в №6–2001*

1780*. Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет. Докажите существование трёх одноцветных точек, являющихся вершинами равностороннего треугольника. *В.В.Произволов. Решение — в №6–2001*

1781. Начальник охраны приказал расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. У каждого часового есть прожектор, который освещает отрезок длиной 100 метров. Исполни́м ли приказ? *В.Клепцын. LXIV московская олимпиада, 2001 год. Решение — в №1–2002*

1782. Для любого натурального числа n множество решений неравенства $|x! - y^y| < n$ в натуральных числах x и y конечно. Докажите это. *С.Злобин. LXIV московская олимпиада, 2001 год. Решение — в №1–2002*

1783. В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Оказалось, что треугольник HML равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний. *Р.Г.Женодаров. LXIV московская олимпиада, 2001 год. Решение — в №1–2002*

1784*. На доске записаны все целые числа от 1 до 2000. а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске.

б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть ещё одно число? *Ф.Г.Шлейфер. Решение — в №1–2002*

1785. Остров разделён на княжества. Раскраску называем правильной, если всякие два княжества, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета. Докажите следующие утверждения.

а) Если каждое княжество представлено на карте острова равносторонним треугольником, то для правильной раскраски карты достаточно двух красок.

б*) Если каждое княжество представлено на карте равнобедренным прямоугольным треугольником, то для правильной раскраски карты достаточно четырёх красок.
В.В.Произволов. Решение — в №1–2002

1786. На плоскости отмечены шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причём все расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках есть два треугольника с общей стороной, которая в одном из них является наибольшей, а в другом — наименьшей.
С.Рукшин. Московский отбор на Всероссийскую XXVII олимпиаду. Решение — в №2–2002

1787*. Пусть p и q — натуральные числа, не равные 1. Докажите, что если $q^3 - 1$ делится на p, а $p - 1$ делится на q, то $p = q^2 + q + 1$ или $(p - 1)^2 = q^3$.
Н.Н.Осипов. Решение — в №2–2002

1788. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, A', B' и C' — точки её касания со сторонами BC, CA и AB соответственно. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P, прямые AC и $A'C'$ — в точке M, а BC и $B'C'$ — в точке N. Докажите перпендикулярность прямых IP и MN.
А.А.Заславский. Решение — в №2–2002

1789. а) Из ста гирек массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбраны 50 гирь, сумма масс которых равна сумме масс оставшихся гирь. Массы никаких двух выбранных гирь не отличаются на 50 г. Докажите, что в наборе есть две гири, сумма масс которых равна 101 г.

б) Из двухсот гирек массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выбраны 100 гирь, сумма масс которых равна сумме масс оставшихся гирь. Массы никаких двух выбранных гирь не отличаются на 100 г и не дают в сумме 201 г. Докажите, что сумма масс 50 самых лёгких выбранных гирек равна 2525 г. *В.В.Произволов. Решение — в №2–2002*

1790. Имеется несколько равносторонних треугольников, у каждого из которых одна сторона жёлтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник. Докажите, что сумма длин жёлтых участков границы полученного равностороннего треугольника равна сумме длин красных участков его границы.

С.Г.Волчёнков и В.В.Произволов. *Решение — в №2–2002*

1791. а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?

б) На плоскости расположены несколько окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все данные окружности имеют общую касательную.

В.В.Произволов. *Решение — в №2–2002*

1792. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек есть отличный от них человек, знакомый со всеми ними. Докажите, что в этой компании есть человек, знакомый со всеми остальными. *С.Берлов. XXVII Всероссийская олимпиада, 2001 год.* *Решение — в №2–2002*

1793*. В магическом квадрате размером $n\times n$, составленном из первых n^2 чисел, центры любых двух его клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма полученных векторов равна нулю. (Магическим называем квадрат, заполненный числами таким образом, что сумма чисел любой его строки равна сумме чисел любого его столбца.)

И.Богданов. XXVII Всероссийская олимпиада, 2001 год. *Решение — в №2–2002*

1794. На прямой выбрано 100 множеств, каждое из которых является объединением 100 отрезков. Докажите, что пересечение этих 100 множеств является объединением не более чем 9 901 отрезков. (Точку также считаем отрезком.)

Р.Карасёв. XXVII Всероссийская олимпиада, 2001 год. *Решение — в №2–2002*

1795. На сфере определена непрерывная функция. Докажите, что некоторое своё значение эта функция принимает на каждой из больших окружностей сферы. (Окружность на сфере называют большой, если её центр совпадает с центром сферы.)

В.В.Произволов. *Решение — в №2–2002*

1796. Король обошёл шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая 64-звенная ломаная. Никакие два её соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное количество диагональных ходов равно 8. *И.Ф.Акулич.* *Решение — в №3–2002*

1797. Красные и синие точки, чередуясь, делят окружность на $2n$ дуг. Длины любых двух смежных дуг отличаются на 1. Докажите, что периметр n-угольника с красными вершинами равен периметру n-угольника с синими вершинами.

В.В.Произволов. *Решение — в №3–2002*

1798. В некотором городе живут 1000 человек. Из них 300 честные, 700 — хитрые. Хитрые на некоторые вопросы отвечают правдиво, а на некоторые лгут по собственному желанию. Честные всегда говорят правду. Сколько хитрецов можно гарантированно выявить при помощи сколь угодно длинного допроса, если жители знают друг о друге всё? *Н.Б.Васильев и Б.Д.Гинзбург.* *Решение — в №3–2002*

1799*. Натуральные числа x и y таковы, что число $x+y+xy$ является квадратом натурального числа. Докажите существование такого натурального числа z, что каждая из семи сумм $xy+z$, $yz+x$, $xz+y$, $x+z+xz$, $y+z+yz$, $xy+yz+zx$ и $xy+yz+zx+x+y+z$ является квадратом натурального числа.

В.В.Произволов. *Решение — в №3–2002*

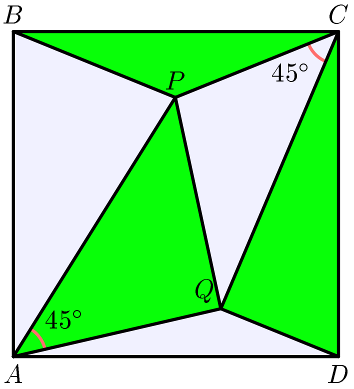
1800. Сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов площадей трёх его сечений, каждое из которых проходит через середины рёбер рассматриваемого тетраэдра. Докажите это. *А.А.Заславский.* *Решение — в №3–2002*

2002 год

1801. Натуральное число n равно сумме некоторых трёх различных натуральных делителей числа $n-1$. Найдите все такие числа. *С.И.Токарев.* *Решение — в №4–2002*

1802. План секретного объекта представляет собой квадрат размером 8×8, который разбит коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещённость сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещённых коридорах свет выключается, а в неосвещённых — включается). Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещённого объекта. Он может ходить только по освещённым коридорам и щёлкать переключателями сколько угодно раз. а) Может ли сторож перебраться в верхний левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах? б) Найдите все вершины квадратиков, в которые сторож может так перебраться. *А.В.Шаповалов.* *Решение — в №4–2002*

1803. Внутри квадрата $ABCD$ расположены точки P и Q таким образом, что величины углов PAQ и QCP равны 45°. Докажите, что сумма площадей треугольников PAQ, PCB и QCD равна сумме площадей треугольников QCP, QAD и PAB. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2002. Комментарий — в задаче М1767*



1804. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

XLII международная олимпиада, задачу предложила Южная Корея. *Решение — в №4–2002*

1805*. В математической олимпиаде участвовали 21 мальчик и 21 девочка. Каждый из них решил не более 6 задач. Для любого мальчика и для любой девочки существует задача, которую решили и он, и она. Докажите, что существует задача, которую решили по крайней мере три мальчика и три девочки. *XLII международная олимпиада, задачу предложила Германия.* *Решение — в №4–2002*

1806. Квадратная матрица (таблица, заполненная числами) размером $n \times n$ такова, что любые n чисел, выбранные по одному из каждой строки и из каждого столбца, дают одинаковую сумму. В каждой строке таблицы выберем наименьшее её число, а затем из полученных n чисел выберем наибольшее число M. В каждом столбце таблицы выберем наибольшее его число, а затем из полученных n чисел выберем наименьшее число m. Докажите равенство $m = M$. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2002*

1807. При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон? *А.А.Заславский.* *Решение — в №4–2002*

1808. Решите в натуральных числах уравнение а) $x!+y!=z!!$; б) $(x!)(y!)=z!!$, где $z!!$ — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих ту же чётность, что и число z. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–2002*

1809*. Пользуясь одной линейкой, найдите центры двух а) пересекающихся; б) касающихся (внешним или внутренним образом); в) концентрических окружностей. *И.З.Вайнштейн.* *Решение — в №4–2002*

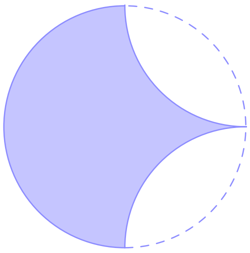
1810*. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится чётное число рёбер. Одна грань многогранника красная, остальные — синие. Периметры синих граней все равны 1. Докажите, что периметр красной грани равен целому числу. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2002*

1811. Два джентльмена одновременно начали прогулку из пунктов A и B, чтобы завершить её, соответственно, в пунктах B и A. В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между A и B 1000 метров, через каждые 100 метров от аллеи отходит боковая аллея длиной 100 метров. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти пройти по ней туда-обратно либо её проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.

В.В.Произволов. Решение — в №5–2002

1812. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОД}(a^2-1, b^2-1, c^2-1) = 1$. Докажите равенство $\text{НОД}(ab+c, bc+a, ca+b) = \text{НОД}(a, b, c)$. *А.С.Голованов.* Решение — в №5–2002

1813. Фигура ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса.



а) Разрежьте фигуру на три части, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте фигуру на 4 части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трёх других можно было сложить квадрат.

В.В.Произволов. Решение — в №5–2002

1814. Пусть a, m и n — натуральные числа, причём число a взаимно просто с числом mn. Обозначим через r_k остаток от деления числа $[a^k/m]$ на n. Докажите, что последовательность r_1, r_2, r_3, ... периодическая.

Н.Н.Осипов. Решение — в №5–2002

1815. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырёхугольника перпендикулярны один другому. Докажите, что они пересекаются.

А.А.Заславский. Решение — в №5–2002

1816. Сумма 2000 натуральных чисел больше их произведения. Докажите, что не более 10 из этих чисел отличны от 1. *В.А.Сендеров и А.В.Спивак.* Решение — в №6–2002

1817. Перпендикулярные одна другой диагонали вписанного в квадрат четырёхугольника и стороны этого четырёхугольника делят квадрат на 8 треугольников, в шахматном порядке окрашенных в красный и синий цвета. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумма радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники. *В.В.Произволов.* Решение — в №6–2002

1818. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$. *А.Петров, А.Ковальджи, С.Нестеров и В.Сендеров.* Решение — в заметке «Можно решить проще и красивее», с. 54 «Кванта» №3–2003 и в «Кванте» №6–2002

1819. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A', B' и C' соответственно. Высоты треугольника $A'B'C'$ пересекаются в точке P. Докажите, что точки O, I и P лежат на одной прямой. *А.А.Заславский.* Решение — в №6–2002

1820. Докажите, что если числа a и b натуральные и если а) десятичная запись числа a^2+ab+b^2 оканчивается нулём, то она оканчивается двумя нулями; б*) число $a^4+a^2b^2+b^4$ делится на 11, то оно делится на 121. *В.В.Произволов.* Решение — в №6–2002

1821*. Для любого натурального n докажите неравенство

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \ldots + (-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right| < \sqrt{2n}.$$

В.Барзов. Решение — в №6–2002

1822. На турнир математических боёв съехались $2n$ команд, каждая из которых должна по одному разу встретиться со всеми остальными. Организаторы планируют провести соревнование за $2n-1$ туров, чтобы в каждом туре участвовали все команды, а выходных дней у команд не было. Однако вследствие своей безалаберности они составляют расписание встреч на каждый тур без каких-либо планов на будущее — лишь бы в данном туре участвовали все команды и не произошло повторных встреч. Может ли случиться так, что составить расписание для очередного тура окажется невозможным (то есть при любом разбиении команд на пары окажется, что какие-то две команды уже встречались ранее), если а) $n=5$; б) $n=6$; в) $n=8$; г) n — любое натуральное число? *И.Ф.Акулич и А.Спивак.* Решение — в №6-2002

1823*. Для любого натурального n число $f(n)$, где f — многочлен третьей степени, является кубом целого числа. Докажите, что для некоторых целых a и b верно тождество $f(x)=(ax+b)^3$. *Н.Н.Осипов.* Решение — в №6-2002

1824. A_1, A_2, ..., A_n — различные точки координатные плоскости, M — их центр тяжести, $n>1$, C — центр круга наименьшего радиуса r, в котором содержатся точки A_1, A_2, ..., A_n. Докажите неравенство $n\cdot MC\leqslant(n-2)r$. (Центр тяжести точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, ..., $A_n(x_n;y_n)$ — это точка $M\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};\ \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)$.) *И.Протасов и Г.Радзиевский.* Решение — в №6-2002

1825*. Поверхность куба размером $5\times5\times5$ можно естественным образом оклеить 150 бумажными квадратами размером 1×1 каждый, оклеив каждую из граней 25 квадратами. Докажите, что поверхность этого куба можно оклеить этими же бумажными квадратами так, чтобы никакая грань не была оклеена никакими 25-ю из них. *В.В.Произволов.* Решение — в №6-2002

1826. Если сумма обратных величин $1/a$, $1/b$ и $1/c$ положительных чисел a, b и c больше или равна суммы самих этих чисел, то $a+b+c\geqslant3abc$. Докажите это. *С.Злобин. LXV московская олимпиада.* Решение — в №1-2003

1827. QH — перпендикуляр, опущенный из точки Q окружности ω на её диаметр AB. Окружность с центром Q и радиусом QH пересекает окружность ω в точках C и M. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам. *В.Дубов.* Решение — в №1-2003

1828. А, Б, В, Г и Д собирают марки. У А — более 3/4 марок Б, у Б — более 3/4 марок В, у В — более 3/4 марок Г, у Г — более 3/4 марок Д, у Д — более 3/4 марок А. Докажите существование марки, которая есть у всех пятерых филателистов. *В.В.Произволов.* Решение — в №1-2003

1829. Можно ли раскрасить все точки некоторого квадрата и все точки некоторого круга в чёрный и белый цвета таким образом, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек были подобны друг другу (возможно, с разными коэффициентами подобия)? *Г.А.Гальперин. LXV московская олимпиада.* Решение — в №1-2003

1830. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности найдётся число, начиная с которого каждый член последовательности равен сумме всех предыдущих. *А.В.Шаповалов. LXV московская олимпиада.* Решение — в №1-2003

1831. В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно найти две, сумма масс которых равна 100 граммам. Докажите, что сумма масс всех гирек равна 1 килограмму. *В.В.Произволов.* Решение — в №2-2003

1832. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон BC, AC и AB в точках A', B' и C' соответственно. Точка Q — середина отрезка $A'B'$. Докажите равенство величин углов $B'C'C$ и $A'C'Q$. *А.А.Заславский.* Решение — в №2-2003

1833. Фигура «танк» ходит по горизонтали или по вертикали на данное число n клеток, где $n > 1$, закрашивая по пути все клетки, по которым движется. Сделав несколько ходов по бесконечной клетчатой доске, танк вернулся на исходную клетку. Оказалось, что его след нигде сам себя не пересёк. При каких n площадь, ограниченная следом танка, могла оказаться равна 2002?

С.Г.Волчёнков и А.Малеев. Решение — в №2–2003

1834. Докажите неравенства а) $x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6 + 3x^4y^4z^4 \geqslant 2(x^3 + y^3 + z^3)x^3y^3z^3$; б) $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geqslant 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$. *Ф.Г.Шлейфер и В.А.Сендеров.* Решение — в №2–2003

1835. Около четырёхугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная одной из сторон четырёхугольника. Две другие противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что его длина равна четверти периметра четырёхугольника. *В.В.Произволов.* Решение — в №2–2003

1836. Гидра состоит из голов и шей (любая шея соединяет между собой две головы). Одним ударом меча Геракл может снести все шеи, выходящие из любой выбранной головы. Но при этом из этой головы мгновенно вырастает по одной шее во все те головы, с которыми эта голова не была соединена. Геракл победит гидру, если ему удастся разрубить её на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее такое число n, что Геракл может победить любую стошеюю гидру, нанеся не более чем n ударов. *Ю.Лифшиц. XXVIII Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2003

1837. Для любого натурального числа $n > 10\,000$ существует такое представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел натуральное число m, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$. Докажите это. *А.С.Голованов. XXVIII Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2003

1838. На плоскости нарисовали несколько красных и синих прямых. Никакие две прямые не параллельны. Через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку. *В.Дольников и И.Богданов. XXVIII Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2003

1839. Если $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то а) $(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x}$; б) $(\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}$. Докажите это. *В.А.Сендеров.* Решение — в №2–2003

1840. В сферу вписано несколько правильных тетраэдров так, что любые два из них имеют общую вершину. Докажите, что все тетраэдры имеют общую вершину.

В.В.Произволов. Решение — в №2–2003

1841. Для любых натуральных чисел a, b и c докажите равенство

$$\text{НОК}\,[\text{НОД}(a,b), \text{НОД}(b,c), \text{НОД}(c,a)] = \text{НОД}\,(\text{НОК}\,[a,b]\,, \text{НОК}\,[b,c]\,, \text{НОК}\,[c,a])\,.$$

В.В.Произволов. Решение — в №3–2003

1842. Вершины A и B треугольника ABC лежат на окружности с центром O. Точки O и C находятся по одну сторону от прямой AB. Поворотом треугольника ABC вокруг точки O получен треугольник $A'B'C'$, причём луч $B'C'$ проходит через вершину C и пересекает окружность в точке F. Докажите равенство $CF = CB$.

В.Дубов. Решение — в №3–2003

1843. Имеется неограниченно много кошельков. Первоначально в одном из них лежат km монет, где k и m — натуральные числа; остальные кошельки пусты. Затем неоднократно выполняем следующую операцию: из каждого кошелька, в котором есть хотя бы одна монета, вынимаем по одной монете, и все вынутые монеты складываем в какой-нибудь пустой кошелёк. Для каких пар чисел $(k; m)$ через некоторое время в некоторых k кошельках окажется по m монет в каждом?

И.Ф.Акулич. Решение — в №3–2003

1844. Периметр пятиугольника $ABCDE$ равен 4, углы BAE, DEA и BCD прямые, а $AB = DE = 1$. Докажите, что биссектриса CF угла C делит пятиугольник на четырёхугольники, у которых равны как периметры, так и площади.

В.В.Произволов. *Решение — в №3–2003*

1845. Назовём несоседние натуральные числа a и b близкими, если $a^2 - 1$ делится на b и $b^2 - 1$ делится на a.

а) Пусть $n > 1$. Докажите, что на отрезке $[n; 8n - 8]$ существует пара близких чисел.

б) Укажите такое $n > 1$, что на отрезке $[n; 8n - 9]$ нет ни одной пары близких чисел.

И.Богданов и В.А.Сендеров. *Решение — в №3–2003*

2003 год

1846. Для любых натуральных n и $k \leqslant n$ докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{n^2+nk+k^2}{n^2}.$$

Десятиклассник В.Орлов. Решение — в №4–2003

1847. В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешено выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых чётное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в банках оказалось поровну пауков? *В.Каскевич. Решение — в №4–2003*

1848. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$. *В.В.Произволов. Решение — в №4–2003*

1849. Простое число p удовлетворяет равенству $p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1$, где n и m — целые неотрицательные числа. Докажите неравенство $p < 18$. *В.А.Сендеров. Решение — в №4–2003*

1850. Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветами в следующей очерёдности. Первые n чисел — красные, затем одно — синее, затем $(n-1)$ чисел — красные, затем два — синие и так далее, наконец, одно число — красное, а последние n чисел — синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются с возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел. *В.В.Произволов. Решение — в №4–2003*

1851. Нарисованы координатные оси Ox, Oy и график функции $y = \frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку $(1;1)$.

С.И.Токарев. Решение — в №4–2003

1852. Дано натуральное число n. В интервале $(n^2; n^2+n)$ выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличающихся от a и b.

С.Иванов. Санкт-Петербургская олимпиада 2002 года. Решение — в №4–2003

1853. С числом разрешено делать следующее: возвести в любую натуральную степень или отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами. Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

К.П.Кохась. Санкт-Петербургская олимпиада 2002 года. Решение — в №4–2003

1854*. Пусть $f(x)$ — многочлен степени $m > 1$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество значений многочлена $f(x)$ в целых точках содержит бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $f(x) = a(bx+c)^m$, где a, b — ненулевые целые числа, c — целое число. *Н.Н.Осипов. Решение — в №4–2003*

1855. Плоскости, параллельные граням прямоугольного параллелепипеда, разрезали его на меньшие параллелепипеды, которые окрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Сумма объёмов чёрных параллелепипедов равна сумме объёмов белых. Докажите, что из чёрных параллелепипедов можно составить параллелепипед P, а из белых можно составить конгруэнтный ему параллелепипед Q.

В.В.Произволов. Решение — в №4–2003

1856. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его основания AC в точке E, а боковых сторон — в точках M и K. Прямая MK пересекает продолжение основания в точке P. Докажите перпендикулярность прямых PO и BE. *М.А.Волчкевич.* *Решение — в №5–2003*

1857. На окружности находится множество K, состоящее из k точек, делящих окружность на k равных дуг. В K взяты два подмножества M и N, содержащие m и n точек соответственно. У подмножеств M и N ровно r общих точек. Более того, на какой бы угол, кратный $2\pi/k$, мы ни повернули подмножество N, оно по-прежнему будет иметь ровно r общих точек с подмножеством M. Докажите равенство $rk = mn$. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2003*

1858. Даны такие натуральные числа a и b, что числа $2a+1$ и $2b+1$ взаимно просты. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ и $2^{2b+1}+$ $+2^{b+1}+1$? *Д.Ростовский и А.Храбров.* *Решение — в №5–2003*

1859. Квадратный стол площади 2 можно в два слоя покрыть четырьмя квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 1. Более того, это можно сделать 100 различными способами. Найдите эти способы. (Салфетки можно перегибать, но нельзя рвать.) *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2003*

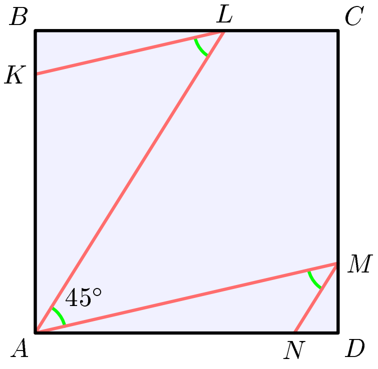
1860. Точка F является одним из фокусов эллипса, вписанного в выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что сумма величин углов AFB и CFD равна 180°. *М.А.Волчкевич.* *Решение — в №5–2003*

1861. Среди любых $n+1$ вершин правильного $(2n+1)$-угольника, где $n>1$, есть три, являющиеся вершинами равнобедренного треугольника. Докажите это. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2003*

1862. Биссектрисы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что а) если $ID = IF = IE$, то треугольник ABC равносторонний; б) если треугольник DFE равносторонний, то и треугольник ABC равносторонний. *А.А.Заславский и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–2003*

1863*. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — наименьшее натуральное число, которое ещё не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность. *Дж.Лагариас, И.Рейнс, Н.Слоан и А.Спивак.* *Решение — в №6–2003*

1864. В квадрат $ABCD$ вписана ломаная $KLAMN$ так, что величины углов KLA, LAM и AMN равны 45°. Докажите равенство $KL^2+AM^2 = AL^2+MN^2$. *В.В.Произволов.* *Решение — в №6–2003*



1865*. Для натурального числа $n = 46$ можно указать натуральное число

$$m = 460\,100\,021\,743\,857\,360\,295\,716,$$

обладающее следующими свойствами: первые цифры числа m представляют собой число n, а если эти первые цифры перенести в конец числа m, то (отбросив при необходимости первые нули) получим число 10002174385736029571646, которое ровно в n раз меньше числа m. Для каких ещё натуральных n существует число m, обладающее такими же свойствами? *И.Ф.Акулич.* *Решение — в №6–2003*

1866. Остров разделён на княжества, каждое из которых представляет собой на карте острова параллелограмм. При этом любые два параллелограмма либо не имеют общего участка границы, либо в качестве общего участка границы имеют общую сторону. Докажите, что для правильной раскраски карты острова достаточно трёх красок. (Раскраска правильная, если любые два княжества, имеющие общий участок границы, закрашены в разные цвета.) *В.В.Произволов.* Решение — в №6–2003

1867*. Каково наибольшее возможное количество элементов пересечения множества членов некоторой геометрической прогрессии с множеством чисел вида а) $2^n - 1$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $2^n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$? *А.С.Голованов и В.А.Сендеров.* Решение — в №6–2003

1868*. Рассмотрим множество всех квадратных таблиц размером $p \times p$, где $p > 1$, заполненных натуральными числами 1, 2, ..., p^2. Назовём правильной таблицу, в которой в первой строке стоят по порядку числа 1, 2, ..., p, во второй строке — $p+1$, $p+2$, ..., $2p$, и так далее. Пусть A — подмножество множества таблиц, в котором каждую таблицу можно получить из правильной операциями перестановки столбцов и перестановки строк, B — подмножество, в котором операциями прибавления числа 1 ко всем числам строки или столбца из любой таблицы можно получить таблицу с равными числами. Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда p — простое. *Д.А.Калинин.* Решение — в №6–2003

1869. а) Решите уравнение $\sin^8 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^8 x + \frac{1}{\cos^3 x}$.

б) Пусть $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, числа m и n натуральные, $x^n + \frac{1}{x^m} = y^n + \frac{1}{y^m}$. Докажите неравенство

$$x^2 + y^2 > \sqrt[n+m]{\frac{16}{9}}.$$

В.А.Сендеров. Решение — в №6–2003

1870. а) На плоскости даны точки A, B, C и D общего положения (то есть никакие три из них не лежат на одной прямой). Известно. что углы между прямыми AB и CD, AC и BD, AD и BC равны. Докажите, что они прямые.

б) Углы между противоположными рёбрами тетраэдра равны. Верно ли, что они прямые? *А.А.Заславский.* Решение — в №6–2003

1871. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им выдали 10 литровых и 25 поллитровых кружек. Каждому принесли пол-литровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей могут напиться? *Р.Г.Женодаров. XXIX Всероссийская олимпиада.* Решение — в №6–2003

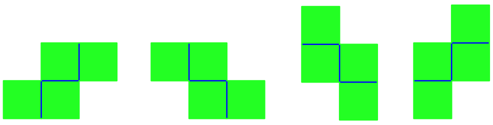
1872. Прямоугольник разрезан на прямоугольники, у каждого из которых хотя бы одна сторона принадлежит границе исходного прямоугольника. Докажите, что найдутся два прямоугольника с общей стороной. *В.В.Произволов.* Решение — в №1–2004

1873. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Из любого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим два раза ни через какой город. Докажите, что города можно распределить между тремя губерниями так, чтобы любая дорога соединяла города из разных губерний. *И.Межиров и А.В.Спивак. LXVI московская олимпиада.* Решение — в №1–2004

1874. Решите уравнение $x^y - y^x = 1$ в натуральных числах x и y. *В.В.Произволов и В.А.Сендеров.* Решение — в №1–2004

1875. Сколько может быть граней у выпуклого многогранника, для любого ребра которого соответствующий внутренний двугранный угол острый? *А.А.Заславский и О.Подлипский. LXVI московская олимпиада.* Решение — в №1–2004

1876. а) Во всех клетках квадрата $n\times n$ стоят минусы. За один ход можно поменять знаки в одной из изображённых четырёх фигурок. При каких n можно получить плюсы во всех клетках квадрата?



б) Докажите, что если в каком-то квадрате поменяли таким образом все знаки, то при этом фигурки каждого из четырёх видов использовались одинаковое по чётности число раз.

Десятиклассник Д.Пермяков. Решение — в №2–2004

1877. За 64 хода король обошёл все поля шахматной доски и вернулся на прежнее место. Среди прочих он сделал ходы a2-b2 и g8-g7. Докажите, что король сделал не меньше двух диагональных ходов. *В.В.Произволов. Решение — в №2–2004*

1878. На высоте CH треугольника ABC построена, как на диаметре, окружность. Докажите, что касательные к этой окружности, проведённые в точках её пересечения со сторонами AC и BC, пересекаются на медиане CM треугольника.

А.А.Заславский. Решение — в №2–2004

1879. На левую и правую чашки весов положили по 100 гирек из набора 1 г, 2 г, 3 г, ... , 200 г. Значимостью гирьки с какой-либо чашки назовём количество тех гирек другой чашки, которые легче её. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда сумма значимостей гирек левой чашки равна сумме значимостей гирек правой чашки. *В.В.Произволов. Решение — в №2–2004*

1880. На прямой даны $2k-1$ белых и $2k-1$ чёрных отрезков. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k чёрными, а любой чёрный — хотя бы с k белыми. Докажите, что хотя бы один из чёрных отрезков пересекается со всеми белыми отрезками, и хотя бы один белый отрезок пересекается со всеми чёрными.

В.Дольников. XXIX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2004

1881. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

С.Берлов. XXIX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2004

1882*. Изначально у Ани и Бори было по длинной полосе бумаги. На одной из них была написана буква А, а на другой — Б. Каждую минуту один из них (не обязательно по очереди) приписывает к слову на своей бумажке слово с бумажки другого. Докажите, что через сутки слово с полоски Ани можно будет разрезать на две части и переставить их местами так, что получится то же слово задом наперёд.

Е.Черепанов. XXIX Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2004

1883. Решите в целых числах уравнение а) $x^4-2y^2=1$; б) $x^2-2y^4=1$; в) $x^4-8y^2=1$; г) $x^4-8y^2=1$. *В.А.Сендеров. Решение — в №2–2004*

1884. а) Квадрат разрезан на квадраты, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего квадрата является целым числом. Докажите, что периметр красного квадрата — тоже целое число.

б) Равносторонний треугольник разрезан на равносторонние треугольники, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего треугольника является целым числом. Докажите, что периметр красного треугольника — целое число.

В.В.Произволов. Решение — в №2–2004

1885. Автомобильная стоянка представляет собой ряд из n мест, занумерованных слева направо числами от 1 до n, а въезд на стоянку находится справа. У въезда скопились n машин, и теперь они по очереди заезжают на стоянку. Каждый водитель сначала подъезжает к своему любимому месту. Если оно свободно, ставит туда машину, а если занято, то едет вперёд до ближайшего свободного места (назад поворачивать нельзя). Обозначим a_k, где $k \leqslant n$, номер любимого места водителя k-й в очереди машины. Будем говорить, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконфликтна, если удаётся поставить машины на стоянку, соблюдая указанные выше правила. Например, при $n = 2$ последовательности (1, 2), (2, 1) и (2, 2) бесконфликтны, а последовательность (1, 1) конфликтна.

а) Докажите, что последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконфликтна тогда и только тогда, когда ни один её член не превосходит n и когда для любого натурального k, где $k < n$, количество членов последовательности, не превосходящих k, не превосходит k.

Найдите количество б*) бесконфликтных последовательностей длины n; в*) бесконфликтных неубывающих последовательностей длины n. *Ю.М.Бурман и А.В.Спивак. Статьи «Числа Каталана» третьего номера 2004 года и статья «Перестановки, автостоянки и деревья» четвёртого номера 2004 года*

1886. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Научитесь при помощи 5 вопросов узнавать количество бубновых карт, лежащих на столе.

С.И.Токарев. XXIX Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–2004

1887. Из точки пересечения диагоналей описанного четырёхугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Докажите, что сумма величин, обратных длинам перпендикуляров, опущенных на некоторые две противоположные стороны, равна сумме величин, обратных длинам других двух перпендикуляров.

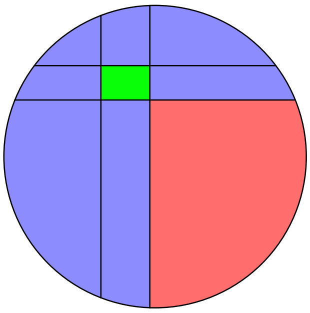
А.А.Заславский. Решение — в №3–2004

1888. В шкатулке лежат n монет достоинством в целое число дукатов каждая на сумму $2n - 1$ дукатов. Докажите, что любую сумму от 1 до $2n - 1$ можно выплатить монетами из шкатулки. *В.В.Произволов. Решение — в №3–2004*

1889. На плоскости даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажите, что точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ можно перенумеровать так, чтобы для любой пары разных индексов k и j угол между векторами $\overrightarrow{A_kA_j}$ и $\overrightarrow{B_kB_j}$ был острым или прямым.

Р.Карасёв. XXIX Всероссийская олимпиада. Решение — в №3–2004

1890. Четыре хорды разделили круг на девять частей, одна из которых (зелёная на рисунке) — прямоугольник. Площадь этого (зелёного) прямоугольника и площади ещё семи (синих) частей — рациональные числа. Докажите, что площадь (красного) криволинейного треугольника — рациональное число. *В.В.Произволов. Решение — в №3–2004*



2004 год

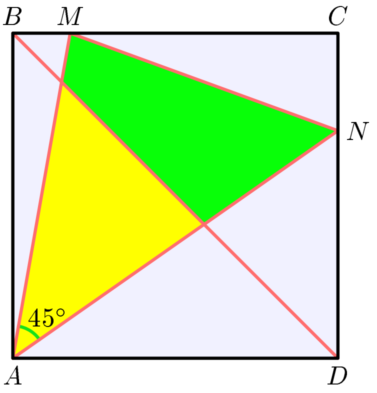
1891. Среди n рыцарей каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого рыцаря ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно? *Е.Барабанов и И.В.Воронович.* *Решение — в №4–2004*

1892. Если $\angle ACB = 45^\circ$, то $AB^4 = (BC^2 - AB^2)^2 + (CA^2 - AB^2)^2$. Докажите это. *Десятиклассница А.Румянцева.* *Решение — в №4–2004*

1893. В круге проведены 100 хорд так, что середина любой из них принадлежит какой-либо другой из этих хорд. Докажите, что среди них найдутся хотя бы два диаметра. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2004*

1894. Числа m и n натуральные, $n > 1$. Число $m^2n^2 - 4m + 4n$ является квадратом натурального числа. Докажите равенство $m = n$. *Н.Н.Осипов.* *Решение — в №4–2004*

1895. В квадрат $ABCD$ вписан треугольник MAN так, что величина угла MAN равна 45°. Докажите, что диагональ BD квадрата делит треугольник на две части равной площади. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2004*



1896. На квадратном холсте со стороной $2n + 1$, где n — натуральное число, художник нарисовал картину чёрной краской. При этом оказалось, что в каждом квадрате размером 2×2, стороны которого параллельны сторонам холста, покрашено в чёрный цвет а) не менее $3/4$; б) не более $3/4$ его площади. Какую наименьшую площадь в случае а) и какую наибольшую площадь в случае б) мог закрасить художник на холсте чёрной краской? *А.Малеев.* *Решение — в №4–2004*

1897. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, ..., $2n$. Блоха за n прыжков побывала во всех отмеченных точках и вернулась в исходную точку. При этом любые два последовательных прыжка были противоположно направлены. Известно, что сумма длин всех прыжков блохи за исключением последнего равна $4n - 3$. Докажите, что длина последнего прыжка равна $2n - 1$. *В.В.Произволов.* *Решение — в №4–2004*

1898. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ точками A_1, A_2, ..., A_{n-1} разделена на n отрезков. На стороне BC отмечены точки B_1, B_2, ..., B_n, некоторые из которых (или даже все) могут совпадать. Проведём в прямоугольнике зигзагообразную ломаную $A_0B_1A_1B_2\ldots A_kB_{k+1}A_{k+1}\ldots A_n$, (возможно, самопересекающуюся), где A_0 — это A, а A_n — это D. Как следует выбрать точки A_k и B_k, где $1 \leqslant k < n$, чтобы сумма длин радиусов r_k окружностей, вписанных во все n треугольников $A_kB_{k+1}A_{k+1}$, была наибольшей? *С.В.Дворянинов.* *Решение — в №4–2004*

1899. Обозначим $f(n) = \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma$, где α, β и γ — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что

а) $f(n) < f(1)$ при $n = 3$ или 4;

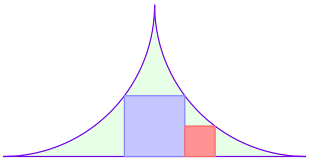
б) $f(n) \leqslant f(1)$ при $n = 2$ или 8;

в) для любого натурального числа $n > 4$, где $n \neq 7$ и $n \neq 8$, существует такой остроугольный треугольник, что $f(n) > f(1)$.

С.В.Маркелов и В.А.Сендеров. *Решение — в №4–2004 и в статье А.Иванова «По следам наших публикаций» второго номера 2006 года*

1900. Можно ли расположить в пространстве 5 одинаковых кубов так, чтобы любые два из них имели общую диагональ, а никакие три не имели?
А.А.Заславский. *Решение — в №4–2004*

1901. В криволинейный треугольник, ограниченный дугами конгруэнтных касающихся окружностей и их общей касательной, помещены синий и красный квадраты, как показано на рисунке. Докажите, что сторона синего квадрата вдвое больше стороны красного. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2004*



1902. На встречу выпускников пришли 45 человек. Любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы между собой. Каково наибольшее возможное число знакомств среди участников встречи?
С.Берлов. *Решение — в №5–2004*

1903. На плоскости дан отрезок AB. На сторонах AX и BX треугольника ABX как на диаметрах внешним образом построены полуокружности. Найдите множество таких точек X, что существует окружность, касающаяся этих полуокружностей в их серединах. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №5–2004*

1904. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству $a(b^2+c^2)=2b^2c$. Докажите неравенство $2b \leqslant c + a\sqrt{a}$. *Н.Н.Осипов.* *Решение — в №5–2004*

1905. Покройте квадратный стол размером 5×5 в два слоя 50 квадратными салфетками так, чтобы никакой отрезок края никакой салфетки не лежал на краю стола. (Салфетки можно перегибать, но нельзя рвать.) *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2004*

1906. На полосу положили квадрат, длина стороны которого равна ширине полосы. Граница квадрата пересекла границу полосы в четырёх точках. Докажите, что две прямые, проходящие «накрест» через эти точки, пересекаются на диагонали квадрата. *В.В.Произволов.* *Решение — в №6–2004*

1907. а) Число $9^{2004}-1$ представили в виде суммы нескольких степеней тройки (с целыми неотрицательными показателями). Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?

б) Число $2004!-1$ представили в виде суммы некоторого количества факториалов. Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?
В.А.Сендеров и Б.Р.Френкин. *Решение — в №6–2004*

1908. Каждая пара (a,b) натуральных чисел порождает пару последовательностей по формулам $x_1=a$, $y_1=b$, $x_{k+1}=x_ky_k$ и $yk+1=x_k+y_k$ для любого натурального k. Докажите, что для любой пары (a,b) существует такое n, что $x_n>y_n$. Обозначим наименьшее из этих чисел n через $f(a,b)$. Для какой пары (a,b) число $f(a,b)$ максимально? *А.Саранцев.* *Решение — в №6–2004*

1909. Девять горизонтальных и девять вертикальных прямых разрезали прямоугольник на 9 красных и 91 синих прямоугольников. Периметр каждого из синих прямоугольников является целым числом. Докажите, что периметры всех 100 прямоугольников — целые числа. *В.В.Произволов.* *Решение — в №6–2004*

1910. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ACD и BCD соответственно; E — точка пересечения прямых BO_1 и AO_2. Докажите равенство величин углов BCE и ACD. *А.Васильев (16 лет) и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–2004*

1911. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a^n + b^n = c^n + d^n, \\ a^m + b^m = c^m + d^m, \end{cases}$$

где m и n — натуральные числа, $m < n$. Докажите следующие утверждения.

а) Если числа m и n одной чётности, то числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ и $|d|$ не могут быть все разными.

б) Если m нечётно, а n чётно, то числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ и $|d|$ не могут быть все разными.

б) Если m чётно, а n нечётно, то существуют такие удовлетворяющие системе уравнений числа, что никакое из четырёх чисел $|a|$, $|b|$, $|c|$ и $|d|$ не равно никакому другому из них. *В.А.Сендеров. Решение — в №6–2004*

1912. Гирьки 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г разложили по 100 штук на каждую чашу весов так, что весы показали равновесие. Сумма масс никаких двух гирь левой чаши весов не равна 301 г. Обозначим через $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ массы гирек левой чаши, а через $b_1 < b_2 < \ldots < b_{100}$ массы гирь правой чаши. Докажите равенство

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + 100b_{100}.$$

В.В.Произволов. Решение — в №6–2004

1913. Если $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, то $2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 2(1-x)(1-y)+1$. Докажите это. *В.Дольников и В.А.Сендеров. Решение — в №6–2004*

1914. Заданная на всей вещественной прямой функция f такова, что $f(0) = 0$ и для любого x верны равенства $f(2+x) = f(2-x)$ и $f(7+x) = f(7-x)$.

а) Может ли функция f принимать ровно два значения? А бесконечно много значений?

б) Найдите все возможные значения наибольшего корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[0; 1000]$. *П.Самовол и В.А.Сендеров. Решение — в №6–2004*

1915. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC = CD = a$ и $BD = DA = AC = b$. Найдите расстояние между прямыми AD и BC. *А.А.Заславский. Решение — в №6–2004*

1916. Равносторонний треугольник разрезан на 25 равносторонних треугольников, лишь один из которых имеет отличную от 1 площадь. Какую? *В.В.Произволов. Решение — в №1–2005*

1917. Натуральные числа a, p и q таковы, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите неравенство $2a(p+q) > pq$. *А.С.Голованов. Окружной этап Всероссийской олимпиады 2004 года. Решение — в №1–2005*

1918. К двум окружностям проведены общие внешние касательные, одна из которых касается окружностей в точках A и B. Бильярдный шар, выпущенный из точки A, отразился от второй касательной и попал в точку B. Докажите, что хорды, высеченные его траекторией на окружности, равны. *А.А.Заславский. Решение — в №1–2005*

1919. Число а) 2004^x+1; б) 2004^x-1 не является ни второй, ни более высокой степенью натурального числа ни при каком натуральном x. Докажите это. *А.Васильев. Решение — в №1–2005. Статья В.А Сендерова и А.В.Спивака «Малая теорема Ферма» третьего номера 2000 года*

1920. Существуют ли такое действительное число x, что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2004x$ оба целые?

И.Богданов и В.А.Сендеров. Окружной этап Всероссийской олимпиады 2004 года. Решение — в №1–2005

1921. На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли такие точки M и N, что $BC = BM$ и $CA = AN$, а на сторонах CA и BC — такие точки P и Q, что $PM \parallel BC$ и $QN \parallel CA$. Докажите равенство $QC = CP$. *В.В.Произволов.* Решение — в №2–2005

1922. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остаётся. Из вершины с внутренним углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернётся.

А.Я.Канель. LXVII московская олимпиада, 2004 год. Решение — в №2–2005

1923. На плоскости отмечено m различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите неравенство $m \leqslant (n+1)^2$.

В.Дольников. Окружной этап XXX Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2005

1924. Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что данные три числа имеют общий делитель, больший единицы. *С.Берлов. Окружной этап XXX Всероссийской олимпиады.* Решение — в №2–2005

1925. Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень всё время остаётся невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

С.И.Токарев. Окружной этап XXX Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2005

1926. Найдите все такие простые числа p, q, r и s, что числа $p^s + s^q$, $q^s + s^r$ и $r^s + s^p$ тоже простые. *Б.Р.Френкин и В.А.Сендеров.* Решение — в №2–2005

1927. Пусть ABC — неравносторонний треугольник; O и I — центры описанной и вписанной окружностей, H — точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?

Р.Будылин, А.Куликов и В.А.Сендеров. Решение — в №2–2005

1928. Для любых положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, разность между наибольшим и наименьшим из которых не превосходит 2, докажите неравенства

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant \sqrt{1+x_1x_2}+\sqrt{1+x_2x_3}+\ldots+\sqrt{1+x_nx_1} \leqslant x_1+x_2+\ldots+x_n+n.$$

Н.Х.Агаханов. Решение — в №2–2005

1929. Для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, из десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что полученное число тоже делится на d. Докажите это.

А.И.Галочкин. LXVII московская олимпиада, 2004 год. Решение — в №2–2005

1930. На любых ли четырёх попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции; б) параллелограмма? *П.Бородин. LXVII московская олимпиада, 2004 год.* Решение — в №2–2005

1931. Каждая точка плоскости, обе координаты которой целые, покрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

С. Берлов. XXX Всероссийская олимпиада. *Решение — в №3–2005*

1932. Последовательность неотрицательных рациональных чисел a_1, a_2, a_3, ... для любых натуральных m и n удовлетворяет равенству $a_m + a_n = a_{mn}$. Докажите, что не все её члены различны. *А. Протопопов. XXX Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №3–2005*

1933. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными линиями, принадлежащим k авиакомпаниям. Любые две линии одной авиакомпании имеют общий город. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ множества так, что никакие два города из одного множества не соединены авиалинией. *В. Дольников. XXX Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №3–2005*

1934. Даны четыре последовательных члена арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля. Не все они квадраты, однако их произведение — квадрат натурального числа. Докажите, что это произведение делится на 2520^2. (Для простоты можете считать, что разность и первый член арифметической прогрессии взаимно просты. Утверждение задачи верно и без этого предположения, но оно значительно упрощает доказательство.) *В.А. Сендеров.* *Решение — в №3–2005. Поправка к условию — на странице 18 первого номера 2005 года*

1935. Все грани тетраэдра — подобные треугольники. Обязательно ли все они конгруэнтны? *В.В. Произволов.* *Решение — в №3–2005. Поправка к условию — на странице 18 первого номера 2005 года*

2005 год

1936. Какую наименьшую ширину может иметь бесконечная полоса бумаги, если из неё можно вырезать любой треугольник площади 1?

Одиннадцатиклассник Д.Семёнов. Решение — в №4–2005

1937. Окружности S_1, S_2 и S_3 касаются одна другой внешним образом. Пусть A, B и C — точки касания S_1 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Прямая AB повторно пересекает S_2 и S_3 в точках D и E соответственно. Прямая CD повторно пересекает окружность S_3 в точке F. Докажите равенство $\angle DEF = 90^\circ$.

И.Рудаков. Решение — в №4–2005

1938. Для любых чисел x_1, x_2, ..., x_n докажите неравенство

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n, -x_1 - x_2 - \ldots - x_n\} \geqslant \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{2n - 1}.$$

Н.Н.Осипов и А.В.Спивак. Решение — в №4–2005

1939. Вершины 50 прямоугольников делят окружность на 200 равных дуг. Докажите, что среди прямоугольников есть хотя бы два равных. *В.В.Произволов.* Решение — в №4–2005

1940. Пусть a — натуральное число. Докажите, что уравнение $x(x + a) = y^2$ а) при $a = 1$, 2 или 4 не имеет решений в натуральных числах; б) при любом другом a имеет их. *В.А.Сендеров.* Решение — в №4–2005

1941. На плоскости жили 44 весёлых чижа, точечных и непрозрачных. После посещения плоскости котом Мурзиком чижи разлетелись и расселись на плоскости так, что каждый из них видит ровно 10 других. Докажите, что посещение плоскости Мурзиком уменьшило количество чижей. *Г.А.Гальперин и В.А.Сендеров.* Решение — в №4–2005

1942. Внутри острого угла с вершиной O даны точки A и B. Бильярдный шар может попасть из A в B, отразившись либо от одной стороны угла в точке M, либо от другой в точке N. Докажите, что если $OA = OB$, то точки O, A, B, M и N лежат на одной окружности. *А.А.Заславский.* Решение — в №4–2005

1943. По кругу расставлено несколько корзин (не меньше трёх). Первоначально в одной из них лежит одно яблоко, а остальные корзины пусты. Далее неоднократно проделывают следующую операцию: из какой-нибудь корзины вынимают яблоко, а взамен кладут по яблоку в каждую из двух соседних с ней корзин. При каком количестве корзин можно добиться того, чтобы во всех корзинах яблок стало поровну? *И.Ф.Акулич.* Решение — в статье «Кушай яблочко, мой свет!» четвёртого номера 2005 года

1944. Квадратный стол площади 5 покройте в 4 слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. (Салфетки разрешено перегибать.)

В.В.Произволов. Решение — в №4–2005

1945. Всякий ли остроугольный треугольник можно расположить в пространстве так, что все его вершины окажутся на выходящих из некоторой одной вершины некоторого куба его а) рёбрах; б) диагоналях граней? *С.В.Дворянинов и В.А.Сендеров.* Решение — в №4–2005

1946. AH и CL — высоты треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, $AC = CB$. Докажите, что длина проекции CH стороны AC на сторону BC равна длине отрезка AB тогда и только тогда, когда $IH \parallel AB$.

Десятиклассник А.Полянский и В.А.Сендеров. Решение — в №5–2005

1947. Десятичная запись квадрата натурального числа оканчивается на три одинаковые цифры. Докажите, что предшествующая им цифра чётна. *В.А.Сендеров.* Решение — в №5–2005

1948. Радиусы окружностей S_1 и S_2 равны. Внешним образом касаются: окружности S_1 и S_2 в точке B; S_1 и S_3 в точке A; окружности S_2 и S_3 — в точке B. Прямая AB вторично пересекает S_2 в точке D. Прямая CD вторично пересекает S_3 в точке F. Прямая AF вторично пересекает S_1 в точке N. Прямая AC вторично пересекает S_2 в точке L. Докажите, что четырёхугольник $DNAL$ — ромб. *И.Рудаков.* *Решение — в №5–2005*

1949. На координатной плоскости расположен правильный многоугольник с центром $(0;0)$. Одна из его вершина — точка $(1;0)$. Докажите существование многочлена степени n с целыми коэффициентами, множество корней которого совпадает с множеством а) абсцисс; б) ординат вершин этого многоугольника.
И.Дорофеев и В.А.Сендеров. *Решение — в №5–2005*

1950. Правильный восьмиугольник можно разрезать на параллелограммы, но нельзя — на параллелограммы равной площади. Докажите это. *В.В.Произволов.* *Решение — в №5–2005*

1951. Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, одно из которых получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на доске, из которого каждое из двух данных расположений получается одним ходом каждой ладьи?
С.Г.Волчёнков. *Решение — в №6–2005*

1952. AH — высота, BL — биссектриса, CM — медиана треугольника ABC. Докажите, что отрезки AH, BL и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда а) $LH \parallel AB$; б) $\sin\angle A = \operatorname{tg}\angle B\cos\angle C$. *А.Полянский и В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–2005*

1953. Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр, который можно разрезать на доминошки размером 1×2. Докажите, что хотя бы одна сторона многоугольника чётной длины. *В.Гуровиц и С.А.Дориченко.* *Решение — в №6–2005*

1954. Найдите все квадраты, лишь первая и последняя цифры десятичной записи которых отличны от 0. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №6–2005*

1955. ABC — треугольник. Одна из проекций точки D на прямые AB, AC и BC является серединой отрезка, соединяющего другие две из этих проекций. Докажите, что одна из проекций точки C на прямые AB, AD и BD является серединой отрезка, соединяющего две другие из только что упомянутых проекций.
А.А.Заславский. *Решение — в №6–2005*

1956. а) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 2005 таких натуральных чисел, что произведение любых четырёх из них делится на куб их суммы?

б) А бесконечная арифметическая прогрессия с такими же свойствами?
И.Ф.Акулич и В.А.Сендеров. *Решение — в №6–2005*

1957. Из полного набора доминошек выбрали несколько костяшек и выложили по правилам в один ряд. Докажите, что костяшки всего набора можно выложить в один ряд, в котором выбранные костяшки идут в том же порядке (может быть, не подряд). *С.Г.Волчёнков.* *Решение — в №6–2005*

1958*. Докажите следующие утверждения. Существует такая пара натуральных чисел x и y, что а) x^2+xy+y^2; б) x^2-xy+y^2 — квадрат натурального числа.

в) Не существует такой пары натуральных чисел x и y, что числа x^2-xy+y^2 и x^2+xy+y^2 — квадраты натуральных чисел.
В.В.Произволов и В.А.Сендеров. *Решение — в №6–2005*

1959. Имеются n квадратных трёхчленов с буквенными коэффициентами и прозрачный мешок, содержащий $3n$ натуральных чисел. Двое ходят поочерёдно: каждый своим ходом берёт из мешка число и заменяет им какой-то из ещё не заменённых буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из n трёхчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n > 2$? *Н.Х.Агаханов и В.А.Сендеров.* Решение — в №6–2005

1960. Проекции внутренней точки правильного тетраэдра на грани соединены отрезками с вершинами своих граней. В результате поверхность тетраэдра оказалась разделена на шесть областей. Каждая пара областей, содержащих пару противоположных рёбер тетраэдра, окрашена в жёлтый, синий или красный цвет. Докажите, что площадь, окрашенная жёлтым цветом, равна площади, окрашенной синим цветом. *В.В.Произволов.* Решение — в №6–2005

1961. Точка Q лежит внутри параллелограмма $ABCD$, причём $\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$. Докажите равенства $\angle QBA = \angle QDA$ и $\angle QAD = \angle QCD$. *В.В.Произволов.* Решение — в №1–2006

1962. Клетчатый прямоугольник покрыт костями домино (каждая кость покрывает две клетки с общей стороной). Назовём покрытие оригинальным, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением хотя бы одной кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие? *И.Ф.Акулич.* Решение — в №1–2006

1963. Натуральные числа x, y и z удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$ и неравенствам $x > 2$ и $y > 1$. Докажите, что число x имеет не менее 8 натуральных делителей. *В.А.Сендеров.* Решение — в №1–2006

1964. Вневписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается стороны AB в точке C', а продолжений сторон AC и BC — в точках B' и A' соответственно. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке K. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда радиусы описанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ равны. *А.А.Заславский.* Решение — в №1–2006

1965. С крыши дома спущена лестница, содержащая n ступенек. С каждой ступеньки можно перейти на соседнюю; кроме того, с самой верхней ступеньки можно переступить на крышу, а с самой нижней — на землю. На каждой ступеньке укреплён указатель–стрелка, направленный вверх или вниз. В начальный момент на одной из ступеней лестницы стоит человек. В соответствии с указателем он передвигается на соседнюю ступеньку, и сразу после этого указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает в соответствии в указателем на соседнюю ступеньку, и указатель сразу же меняет своё направление на противоположное. Далее человек снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по этому же правилу. Какое наибольшее число шагов может сделать человек, пока не сойдёт с лестницы на землю или на крышу? *И.Ф.Акулич.* Решение — в №1–2006

1966. Если число вида $11\ldots11211\ldots11$, в десятичной записи справа от двойки столько же единиц, сколько слева, делится на 11, то оно делится и на 121. Докажите это. *В.А.Сендеров. XXXI Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2006

1967. В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Сумма масс семи самых лёгких гирь больше суммы масс четырёх самых тяжёлых. Найдите наименьшую возможную сумму масс гирь набора. *О.Подлипский и И.Богданов. XXXI Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2006

1968. Каждую вершину выпуклого четырёхугольника симметрично отразим относительно диагонали, не проходящей через эту вершину. Полученные точки — вершины четырёхугольника Q'. Докажите следующие утверждения.

а) Если Q — трапеция, то Q' — тоже.

б) Площадь четырёхугольника Q' не превосходит утроенной площади четырёхугольника Q. *Л.Емельянов. XXXI Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2006

1969. На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешено для любых трёх карточек узнать множество чисел, записанных на этих карточках. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа на каких карточках написаны?

И.Богданов. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1970. Существует ли такой многочлен f второй степени, что для любого натурального числа n уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = 0$, где буква f написана n раз, имеет ровно 2^n различных вещественных решений?

С.А.Дориченко и А.Толпыго. XXVI Турнир городов. *Решение — в №2–2006*

1971. В таблице размером $2 \times n$ расставлены положительные числа так, что сумма двух чисел любого из n столбцов равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу из каждого столбца так, чтобы для любой из двух строк сумма оставшихся её чисел не превосходила $(n+1)/4$.

Е.Куликов. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1972. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Любой квадрат размером 1×1 пересекает хотя бы одна прямая множества L. Докажите существование квадрата со стороной а) 0,8; б) 0,75, пересечённого не менее чем тремя прямыми множества L.

С.Г.Волчёнков и П.А.Кожевников. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1973. I — центр вписанной окружности треугольника ABC; $AB < BC$; M и N — соответственно середины отрезка AC и дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите равенство величин углов $\angle IMA = \angle INB$.

А.Бадзян. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1974. На бесконечном листе клетчатой бумаги конечное число клеток покрашены чёрной краской так, что у каждой чёрной клетки чётное число белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите, что каждую белую клетку можно покрасить в синий или зелёный цвета так, чтобы у каждой чёрной клетки было бы столько же синих соседок, сколько и зелёных.

А.Глебов, Д.Фон-Дер-Флаасс и П.А.Кожевников. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1975. а) За круглым столом сидят 100 граждан 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на два множества таким образом, чтобы в каждом множестве было по одному гражданину каждой из стран и каждый человек был в одном множестве не более чем с одним соседом.

б*) За круглым столом сидят 100 граждан 25 стран, по четыре от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на четыре множества таким образом, чтобы в каждом множестве было по одному гражданину каждой страны и никто не оказался бы в одном множестве ни с одним своим соседом.

С.Берлов. XXXI Всероссийская олимпиада. *Решение — в №2–2006*

1976. Для любого натурального числа n в десятичной записи хотя бы одного из чисел n и $3n$ есть хотя бы одна из цифр 1, 2, 9. Докажите это.

Р.Г.Женодаров и П.А.Кожевников. Весенний Турнир городов 2005 года. *Решение — в №3–2006*

1977. В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых чёрных ферзей, а в последнем ряду — 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут поменяться местами с чёрными? Ходят белые и чёрные по очереди, передвигая по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей).

С.И.Токарев, Э.Лю и С.А.Дориченко. Весенний Турнир городов 2005 года. *Решение — в №3–2006*

1978. Биссектрисы углов BAD и BCD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K диагонали BC. Точка M — середина отрезка BD. Прямая, параллельная AD и проходящая через C, пересекает луч AM в точке P, лежащей вне четырёхугольника. Докажите равенство $DP = DC$. *Девятиклассник В.Шмаров.* *Решение — в №3–2006*

1979. На прямолинейной дороге стоят несколько светофоров. На каждом светофоре красный свет и зелёный свет горят по одинаковому целому числу минут (для разных светофоров эти количества могут различаться). Автогонщик в каждый момент времени либо едет с фиксированной скоростью, либо стоит на красный свет у светофора. Он изучил режим работы светофоров и утверждает, что он может проехать от начала до конца за 30 или 32 минуты, но не может доехать за 31 минуту. Могут ли его слова оказаться правдой? (Если гонщик подъезжает к светофору в момент переключения света, то он считает, что свет уже переключился.)

И.Богданов. 5-й турнир матбоёв памяти А.Н.Колмогорова. *Решение — в №3–2006*

1980. Любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник площади 1 можно поместить в центрально-симметричный шестиугольник площади 4/3. Докажите это.

В.Дольников, И.Богданов и П.А.Кожевников. *Решение — в №3–2006*

2006 год

1981. В клетках таблицы размером 11×11 расставлены натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша — произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?
С.Берлов. 25-й уральский турнир юных математиков. Решение — в №4–2006

1982. Начав с некоторого натурального числа, каждую секунду к имеющемуся в данный момент числу прибавляем произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что рано или поздно число перестанет изменяться. *А.Я.Канель–Белов.* Решение — в №4–2006

1983. Сколько существует способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, никакие два из которых не отличаются более чем на 1? (Слагаемых может быть одно или несколько. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, не различаем.) *А.Толпыго, С.А.Дориченко и П.А.Кожевников. 26 Турнир городов.* Решение — в №4–2006

1984. На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках не превосходит 1 000 000.
С.Берлов и И.Богданов. 25-й уральский турнир юных математиков. Решение — в №4–2006

1985. Четырёхугольник $ABCD$, у которого нет параллельных сторон, описан около окружности с центром O. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что если точки K, M и O лежат на одной прямой, то на одной прямой лежат и точки L, N и O.
А.А.Заславский, М.Исаев и Д.Цветов. Решение — в №4–2006. Задача М448

1986. Если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, то $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + x_2 + \ldots + y_n)^2 \geqslant 4n(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)$. Докажите это.
П.Самовол и М.Аппельбаум. Решение — в №4–2006

1987. Рассмотрим додекаэдр и икосаэдр с равными расстояниями от центра до ребра. Сравните их объёмы. *А.А.Заславский.* Решение — в №4–2006

1988. Для каких натуральных чисел a существуют такие целые неотрицательные числа k, m и n, что если приписать к десятичной записи числа a^m десятичную запись числа a^n, то получим десятичную запись числа a^k? *В.А.Сендеров.* Решение — в №4–2006

1989. В королевстве n городов и r дорог. Каждая дорога соединяет два города. Из любого города можно добраться до любого другого по дорогам. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (то есть соединённые с ним дорогами) города по гонцу (в таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов). Если ни в одном из городов гонцов недостаточно, то движения прекращаются.

а) Пусть через несколько лет движения гонцов прекратились. Докажите, что если города, отправляющие гонцов, выбирать по-другому, то движения гонцов всё равно прекратятся, причём конечные количества гонцов в городах не зависит от выбора городов, отправляющих гонцов.

б*) Пусть через несколько лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько их там было изначально. Какое наименьшее число гонцов может быть в королевстве?
И.Богданов и П.А.Кожевников. V турнир матбоёв имени А.Н.Колмогорова. Решение — в №4–2006

1990*. На продолжении стороны BC за точку C лежит точка X. Вписанные в треугольник ABX и ACX окружности пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.
Л.Емельянов. Решение — в №4–2006

1991. Среди 6 монет одна фальшивая: отличается по массе от настоящей. За три взвешивания на весах, показывающих при каждом взвешивании общую массу положенных на их чашу монет, научитесь выделять фальшивую монету.

М.Малкин. XXVII Турнир городов. Решение — в №5–2006

1992. Куб перекатили несколько раз (каждый раз — через ребро) так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли верхняя грань повернуться на 90° относительно своего первоначального положения?

И.Богданов. XXVII Турнир городов. Решение — в №5–2006

1993. H — точка пересечения высот треугольника ABC; точка X не лежит ни на одной из прямых AH, BH и CH. Окружность с диаметром HX вторично пересекает прямые AH, BH и CH в точках A_1, B_1 и C_1, а прямые AX, BX и CX — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.А.Заславский. I Всероссийская олимпиада по геометрии памяти И.Ф.Шарыгина. Решение — в №5–2006

1994. а) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причём ни одна изюминка не весит больше 1,001 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г.

б) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причём ни одна изюминка не весит больше $(1+x)$ г. При каком наибольшем x весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г?

И.Богданов, Е.Петров и Д.Карпов. V турнир матбоёв имени А.Н.Колмогорова. Решение — в №5–2006

1995.* Уравнение $n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4$ не имеет решений в натуральных числах. Докажите это. *А.Иванов (Болгария).* Решение — в №5–2006

1996. Для каких n существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все из которых равны между собой, что число $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ целое?

А.В.Шаповалов. XXVII Турнир городов. Решение — в №6–2006

1997. На сторонах прямоугольного треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D, E и F. Докажите, что площадь треугольника DEF не меньше удвоенной площади треугольника ABC.

В.Филимонов, И.Богданов, Ю.Кудряшов и П.А.Кожевников. XXVII Турнир городов. Решение — в №6–2006

1998. В одной кучке лежат n камней, а в другой — k камней. Каждую минуту автомат выбирает кучку, в которой число камней чётное, и половину имеющихся в ней камней перекладывает в другую кучку. Если в обеих кучках нечётное число камней, автомат прекращает работу. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел $(n;k)$, не превосходящих 1000, для которых автомат обязательно остановится? *А.Гейн. IX кубок памяти А.Н.Колмогорова.* Решение — в №6–2006

1999. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 трёхклетчатых прямоугольников так, чтобы каждый прямоугольник с двумя другими прямоугольниками имел ровно по одной общей точке, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

К.П.Кноп и С.Берлов. XXVI уральский турнир юных математиков. Решение — в №6–2006

2000. Есть n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза, и каждому из них надевают на голову колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Затем мудрецы открывают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается угадать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один угадал цвет своего колпака. *IX кубок памяти А.Н.Колмогорова.* Решение — в №6–2006

2001. Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Величины углов A, B и C относятся как $4:2:1$. Докажите равенство $A_1B_1 = A_1C_1$.
С.Токарев. XXVII Турнир городов. Решение — в №6–2006

2002*. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{25}{1+48abc}$.
Я.Алиев и В.А.Сендеров. Решение — в №6–2006

2003*. Докажите следующие утверждения.

а) Для любых натуральных чисел a, b, c, n уравнение $x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2+c^2)^n$ разрешимо в натуральных числах x, y, z.

б) Для любого нечётного числа $n \geqslant 3$ и любых натуральных чисел a, b и c уравнение $ax^2+by^2+cz^2=t^n$ разрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

в) Существуют такие натуральные числа a, b и c, что уравнение $ax^2+by^2+cz^2=t^2$ неразрешимо в натуральных числах x, y, z, t. *А.Авакян и В.А.Сендеров.* Решение — в №6–2006

2004. У Карлсона имеется 1000 банок варенья. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой — не больше 1/100 части всего варенья. На завтрак Карлсон может съедать поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы после нескольких завтраков съесть всё варенье.
Д.В.Мусатов и А.Николаев. XXVII Турнир городов. Решение — в №6–2006

2005*. Никакой выпуклый n-вершинник нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра. Докажите это. *Р.Карасёв. Олимпиада лицея №239 Санкт-Петербурга.* Решение — в №6–2006

2006. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y=f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найдите p.
Н.Х.Агаханов. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №1–2007

2007. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $2\angle MBN = \angle ABC$. Докажите равенство $2\angle MDN = \angle ADC$.
Л.Емельянов и одиннадцатиклассница О.Поройкова. Решение — в №1–2007

2008. Назовём делитель числа n маленьким, если он не превосходит $n/10\,000$, и большим — в противном случае. Конечно ли множество таких n, что произведение всех больших делителей числа n, отличных от n, равно произведению всех его маленьких делителей?
А.Голованов и П.А.Кожевников. Олимпиада лицея №239 Санкт-Петербурга. Решение — в №1–2007

2009. Существуют ли такое $n>1$ и такие попарно различные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, что каждое из них является корнем одного из многочленов $x^2-a_1x+b_1$, $x^2-a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2-a_nx+b_n$?
А.Бадзян. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №1–2007

2010*. Для натуральных чисел m и n количество связных клеточных фигур прямоугольника размером $m\times n$ нечётно тогда и только тогда, когда не кратно числу 4 ни число $m(m+1)$, ни число $n(n+1)$. Докажите это. (Связная клеточная фигура — это такое непустое множество клеток, что из любой его клетки можно пройти в любую другую его клетку, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)
А.Бадзян. Решение — в №1–2007

2011. При любом разбиении множества первых 200 натуральных чисел на 50 множеств хотя бы в одном из них есть три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника. Докажите это.
М.Мурашкин. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2012. Из вершины A тетраэдра $ABCD$ опустили перпендикуляры AB', AC' и AD' на плоскости, делящие пополам соответственно двугранные углы при рёбрах CD, BD и BC. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.

А.Бадзян. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2013. Для каких натуральных n существуют такие нецелые рациональные числа a и b, что числа $a+b$ и a^n+b^n целые?

В.Сендеров. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2014. На дугах AB и BC описанной окружности треугольника ABC выбраны точки K и L так, что прямые AC и KL параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и BCL равноудалены от середины дуги ABC.

С.Берлов. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2007

2015. Можно ли сварить проволочный каркас куба $2\times2\times2$, разбитого на кубики $1\times1\times1$, из восемнадцати деталей конструктора, каждая деталь которого которого имеет вид а) ломаной из трёх взаимно перпендикулярных звеньев длины 1; б) трёх сторон квадрата со стороной длины 1?

Л.Емельянов. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2016. Какое наибольшее количество вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра, может иметь выпуклый $2n$-гранник, все грани которого — треугольники?

А.Гарбер. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2017. Квадрат размером 3000×3000 разбит на доминошки — прямоугольники размером 1×2. Доминошки называем соседними, если они граничат хотя бы по одной из сторон одной из клеток. Докажите, что доминошки можно раскрасить а) в три цвета так, чтобы доминошек всех цветов было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей её цвета; б) в четыре цвета так, чтобы доминошек всех цветов было поровну и никакие две одноцветные доминошки не были соседними.

М.Пастор и П.А.Кожевников. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2007

2018. Если натуральное число n представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, каждое из которых кратно 3, то n представимо и в виде суммы квадратов трёх целых чисел ни одно из которых не кратно числу 3. Докажите это.

П.Козлов. Зональный этап XXXII Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2007

2019. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω.

В.Филимонов. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2007

2020*. Многочлен $(x+1)^n-1$ делится на многочлен степени k, все коэффициенты которого — целые нечётные числа. Докажите, что n делится на $k+1$.

А.Гарбер и И.Богданов. XXXII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2007

2021. Граф на а) 99; б) 100 вершинах таков, что любые 98 его вершин можно разбить на 49 таких пар, что в каждой паре вершины соединены между собой. Каково наименьшее возможное число рёбер такого графа?

С.Берлов и П.А.Кожевников. XXVI Уральский турнир юных математиков. Решение — в №3–2007

2022. Даны окружность, точка A на ней и точка M внутри неё. Рассмотрим хорды BC, проходящие через точку M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC, касаются фиксированной окружности.

В.Протасов и П.А.Кожевников. II Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина. Решение — в №3–2007

2023. a, b, c — ненулевые целые числа, сумма которых равна 0. Докажите, что

а) $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$;

б) если $n - 1$ делится на 3, то $a^n + b^n + c^n$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$;

в) если $n - 2$ делится на 3, то $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$.

В.В.Произволов и В.А.Сендеров. Решение — в №3–2007

2024. Существует ли выпуклый многоугольник, множество длин сторон которого совпадает с множеством длин его диагоналей (то есть каждая сторона которого равна какой-то его диагонали, а каждая диагональ равна какой-то стороне)?

Б.Р.Френкин. II Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина. Решение — в №3–2007

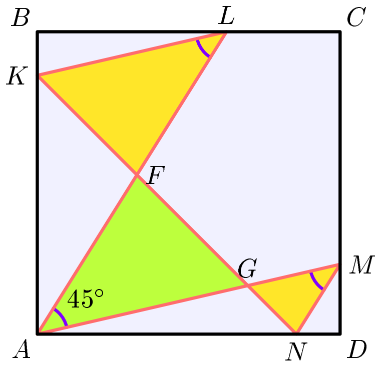
2025*. Докажите следующие утверждения.

а) Для любого нечётного натурального числа n существует возрастающая арифметическая четырёхчленная прогрессия, состоящая из натуральных чисел, произведение членов которой является n-й степенью натурального числа.

б) Произведение никаких четырёх натуральных чисел, образующих возрастающую арифметическую прогрессию, не является квадратом натурального числа.

В.А.Сендеров. Решение — в №3–2007. Статья В.А.Сендерова и Б.Р.Френкина «Гипотеза Каталана» четвёртого номера 2007 года

2007 год



2026. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N соответственно так, что $\angle LAM = 45^\circ$, $KL \parallel AM$ и $AL \parallel NM$. Отрезок KN пересекает отрезки AL и AM в точках F и G соответственно. Докажите равенство площади треугольника AFG сумме площадей треугольников KLF и MNG.

В.В.Произволов. Решение — в №4–2007

2027. На доске написаны натуральные числа a, b и c. Петя записывает на листок произведение некоторых двух из этих чисел, а третье число уменьшает на 1. С новыми числами он проделывает ту же операцию, и так действует до тех пор, пока хотя бы одно из чисел не окажется равно нулю. Найдите сумму чисел, написанных на листке.

Е.Горский и С.А.Дориченко. XXVIII Турнир городов. Решение — в №4–2007

2028. Вруны всегда лгут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Можно задавать только вопросы, ответы на которые — «да» или «нет».

а) Перед нами трое — врун, правдивый и хитрец, которые знают друг про друга, кто из них кто. Найдите способ это узнать.

б) Перед нами четверо — врун, правдивый и два хитреца. Они знают друг про друга, кто из них кто. Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что мы, задавая им вопросы, не сможем ни про кого узнать наверняка, кто он.

Б.Гинзбург и М.Гервер. XXVIII Турнир городов. Решение — в №4–2007

2029. Арифметическая и геометрическая прогрессия состоят только из натуральных чисел. Каждое число, встречающееся в геометрической прогрессии прогрессии, встречается и в прогрессии арифметической. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии — натуральное число. *Б.Р.Френкин. XXVIII Турнир городов. Решение — в №4–2007*

2030. Можно ли вписать октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на рёбрах куба? *Л.Радзивиловский. XXVIII Турнир городов. Решение — в №4–2007*

2031. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, выходящие из вершин A, B и C, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые, проходящие через точки A, B и C параллельно противоположным сторонам треугольника, пересекают эту окружность вторично в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.А.Заславский. II Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина. Решение — в №4–2007

2032. а) Существует ли такое натуральное число n, что для любого натурального числа k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$ и $n^k + 1$ представимо в виде a^b для некоторых натуральных чисел a и b, где $b > 1$?

б*) Назовём натуральное число антипростым, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Два натуральных числа называем близнецами, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов? *В.А.Сендеров. Решение — в №4–2007. Статья В.Сендерова и Б.Р.Френкина «Гипотеза Каталана» четвёртого номера 2007 года*

2033. У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешено задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?».

Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде? *А.В.Шаповалов. Решение — в №4–2007*

2034. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC взяты точки X, Y и Z соответственно так, что треугольник XYZ подобен треугольнику ABC, то есть $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$ и $\angle C = \angle Z$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC равноудалён от точек пересечения высот треугольников ABC и XYZ.
Н.Николов (Болгария). Решение — в №4–2007

2035. В ряд выписано несколько положительных чисел, ни одно из которых не превосходит числа 1. Докажите, что их можно разделить на а) три; б*) любое наперёд заданное число групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не более чем на 1. (Если в группе нет ни одного числа, то сумму её чисел считаем равной 0.) *М.Малкин, И.Богданов и Г.Челноков. Решение — в №4–2007*

2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все работы достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдаёт по одной монете двум другим. Через некоторое у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).
П.А.Кожевников. Решение — в №5–2007

2037. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; точки K и M — середины сторон AB и CD; L и N — проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите перпендикулярность прямых KM и LN.
П.А.Кожевников. Решение — в №5–2007

2038. Фома и Ерёма делят кучу кусков сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерёма выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерёма. Так они делят сыр со второй передачи, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по массе). *А.В.Шаповалов и П.А.Кожевников. Решение — в №5–2007*

2039. Для любого натурального $n > 1$ существует натуральное число z, не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y — натуральные числа. Докажите это.
В.А.Сендеров. Решение — в №5–2007

2040. Положительные числа x_1, x_2, …, x_n удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2} < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}{4}.$$

а) Докажите неравенство $n > 50$.

б) Укажите хотя бы один пример таких чисел.

в*) Найдите наименьшее n, для которого такой пример возможен.
А.Толпыго и И.Богданов. XXVIII Турнир городов.”Решение — в №5–2007

2041. Какое наименьшее число ладей нужно расставить на шахматной доске, чтобы все белые клетки оказались под боем (то есть для любой белой клетки либо на ней стояла ладья, либо была хотя бы одна ладья в той же вертикали или в той же горизонтали)? *Р.Г.Женодаров. XXVIII Турнир городов. Решение — в №6–2007*

2042. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ докажите неравенство $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2$.
Н.Х.Агаханов и И.Богданов. III этап XXXIII Всероссийской олимпиады. Решение — в №6–2007

2043. Существует ли такой набор «Юный паркетчик» из четырёх конгруэнтных четырёхугольников и одного квадрата, что из всех пяти деталей можно сложить квадрат, а из трёх конгруэнтных четырёхугольников этого набора — равносторонний треугольник? *О.Нечаева.* Решение — в №6–2007

2044. Существует ли такой многочлен f чётной степени, что для любого числа a уравнение $f(x) = a$ имеет чётное число решений?
П.А.Кожевников. XXVIII Турнир городов. Решение — в №6–2007

2045. На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{\text{99 единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, каждым ходом разрешено записать ноль вместо одной из единиц, только не первой и не последней, либо стереть один из нулей. Если после некоторого хода число делится на 11, то сделавший ход игрок проиграл. Кто выиграет при правильной игре? *М.Мурашкин. III этап XXXIII Всероссийской олимпиады.* Решение — в №6–2007

2046. Муха села в полдень на секундную стрелку и поехала, соблюдая следующее правило: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то муха пересаживается на обгоняющую стрелку. Сколько оборотов сделает муха к полуночи? *С.Г.Волчёнков.* Решение — в №6–2007

2047. Из точки T, расположенной внутри треугольника ABC, стороны AB, BC и CA видны под углом величиной 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке. *А.А.Заславский. XXVIII Турнир городов.* Решение — в №6–2007

2048. Найдите наибольшее натуральное число k, для которого существует такое натуральное число n, что каждое из чисел n, n^2, ..., n^k представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x и y — целые числа. *В.А.Сендеров.* Решение — в №6–2007

2049. От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов — пирамид с квадратными основаниями и боковыми рёбрами длины $1/3$. Получили многогранник, грани которого — квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями этого многогранника замостить пространство?
А.Я.Канель–Белов. XXVIII Турнир городов. Решение — в №6–2007

2050. В однокруговом турнире по волейболу участвовали 2^n команд, ничьих не было. Назовём команду плохой, если она выиграла у победительницы турнира. Бог планирует провести турнир по олимпийской системе, причём хочет, чтобы все встречи закончились так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что победит та же команда, что в предыдущем турнире, а все плохие команды проиграют уже в одном из двух первых турах.
И.Богданов, Б.Р.Френкин и Л.Остроумова

2051. Если числа a, b и c положительные и $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$, то $a = b = c$. Докажите это.
В.В.Произволов. Решение — в №1–2008 и в статье М.Горелова «О пользе графиков» третьего номера 2010 года

2052. а) Рассмотрим окружность и её хорду AB. Найдите множество точек M, находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведённой из точки M к рассматриваемой окружности. Докажите следующие утверждения.

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырёх точках, диагонали «параболического четырёхугольника» перпендикулярны.

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол.

г) Для любых трёх парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырёх точках, главные диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке. *Десятиклассник Ф.Нилов.* Решение — в №1-2008

2053. Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют такие целые отличные от нуля числа x_1, x_2, ..., x_n, что

$$x_1x_2\ldots x_n = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)(x_1 + x_3 + \ldots + x_n)\ldots(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

С.И.Токарев и В.А.Сендеров. Решение — в №1-2008

2054. Обозначим $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли такие натуральные числа x_1, x_2, ..., x_n, k_1, k_2, ..., k_n, где а) $n = 2$; б) n — нечётное число; в) $n = 4$, что $P(x_1) = {x_2}^{k_2}$, $P(x_2) = {x_3}^{k_3}$, ..., $P(x_n) = {x_1}^{k_1}$?

В.А.Сендеров и Б.Р.Френкин. LXX московская олимпиада. Решение — в №1-2008

2055. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно пронумерованы целыми неотрицательными числами. На некоторых клетках лежат камни. Если на n-й клетке лежат ровно n камней, разрешено снять их с неё и разложить по одному на клетки с номерами, меньшими n. Алексей распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, что все камни можно собрать в нулевой клетке, сделав несколько операций. Найдите минимально возможный номер клетки, на которую он мог положить камень.

Ф.Бахарев и И.Богданов. X кубок памяти А.Н.Колмогорова. Решение — в №1-2008

2056. Найдите наименьшее натуральное число, все цифры которого равны 1, являющееся разностью между некоторым натуральным числом и числом, полученным из него перестановкой цифр. *Н.Х.Агаханов. XXXIII Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2-2008

2057. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили следующую закономерность. Если к любому множеству мальчиков, состоящего не менее чем из 10 элементов, добавить всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в полученном множестве мальчиков на одного меньше, чем девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

С.Г.Волчёнков. XXXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2-2008

2058. Длины пяти из восьми отрезков, соединяющих вершины выпуклого четырёхугольника с серединами сторон, которым не принадлежат эти вершины, равны. Докажите равенство длин всех восьми отрезков. *Н.Х.Агаханов и В.А.Сендеров.* Решение — в №2-2008

2059. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит куб некоторого натурального числа. Докажите, что она содержит и некоторый куб, не являющийся квадратом.

И.Богданов и В.А.Сендеров. XXXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2-2008

2060. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках A', B' и C' соответственно. Отрезок AA' вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая l параллельна стороне BC и проходит через точку A. Прямые $A'C'$ и $A'B'$ пересекает прямую l в точках P и R соответственно. Докажите равенство углов PQR и $B'QC'$.

А.Полянский. XXXIII Всероссийская олимпиада. Решение — в №2-2008

2061. В таблице размером 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в верхней строке числа от 1 до 10 слева направо, во второй сверху — от 11 до 20 слева направо, и так далее. Андрей хочет разрезать таблицу на двухклеточные прямоугольники, перемножить числа в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 произведений. Как следует разрезать квадрат, чтобы получить как можно меньшую сумму? *А.Бадзян. XXXIII Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2-2008

2062. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 разных точек, затем Амаяк стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стёртая точка. Докажите, что Арутюн может так договориться с Амаяком, что фокус гарантированно удастся. *А.Акопян и И.Богданов. XXXIII Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2–2008*

2063. Назовём многогранник хорошим, если его объём, измеренный в кубометрах, численно равен площади его поверхности, измеренной в квадратных метрах. Существует ли хороший тетраэдр, размещённый внутри некоторого хорошего параллелепипеда? *М.Мурашкин. XXXIII Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2–2008*

2064. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Докажите, что середина меньшей из дуг DE лежит на прямой, проходящей через центры вписанных окружностей треугольников ADE и ODE. *М.Исаев. XXXIII Всероссийская олимпиада.* *Решение — в №2–2008*

2065. Если x_1 — рациональное число, причём $x_1 > 1$, то хотя бы один член последовательности, заданной рекуррентной формулой $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, является целым числом. Докажите это. *А.Голованов.* *Решение — в №2–2008*

2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите наибольшее возможное значение величины p. *А.В.Шаповалов и С.Берлов.* *Решение — в №3–2008*

2067. Если число, десятичная запись которого состоит из n единиц, делится на n, то n делится на 3. Докажите это. *Р.Ковалёв.* *Решение — в №3–2008*

2068. В футбольном турнире участвуют mn команд, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$. Командам присвоены номера $1, 2, \ldots, mn$ в соответствии с результатами предварительного этапа. Организаторы собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд сумма номеров согруппниц той из этих двух команд, номер которой меньше, была больше. При каких m и n желание организаторов осуществимо? *И.Ф.Акулич и П.А.Кожевников.* *Решение — в №3–2008*

2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Определим для иррационального числа x последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, q_3 \ldots$ рекуррентно: $q_1 = 1$, а для любого натурального числа k число q_{k+1} — это такое наименьшее натуральное число, для которого выполнено неравенство $\|q_{k+1}x\| < \|q_k x\|$. Докажите для любого натурального k неравенство $q_{k+2} \geqslant q_k + q_{k+1}$. *В.Быковский.* *Решение — в №3–2008*

2070. $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, являющегося пересечением треугольников ACE и BDF, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{S_a S_c S_e}{S_{ACE}} = \frac{S_b S_d S_f}{S_{BDF}},$$

где S_{ACE} и S_{BDF} — площади треугольников ACE и BDF соответственно, а S_a, S_b, S_c, S_d, S_e и S_f — площади закрашенных на рисунке треугольников, примыкающих к точкам A, B, C, D, E и F соответственно. *С.А.Дориченко.* *Статья «Вокруг шестиугольника» четвёртого номера 2008 года*

2008 год

2071. Универсальным числом $U(n)$ назовём минимальное натуральное число, из десятичной записи которого вычёркиванием цифр можно получить десятичную запись любого натурального числа, не превосходящего n. Сколько цифр в десятичной записи числа $U(2008)$? *С.Г.Волчёнков и П.А.Кожевников.* *Решение — в №4–2008*

2072. Найдите $(n+1)$-ю цифру после запятой в десятичной записи квадратного корня из числа $10^{2n}-1$. *Я.Алиев и П.А.Кожевников.* *Решение — в №4–2008*

2073. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка C — произвольная точка одной из этих окружностей, отличная и от P, и от Q. Точки A и B — вторые точки пересечения прямых CP и CQ с другой окружностью. Найдите множество центров описанных окружностей треугольников ABC. *А.А.Заславский и П.А.Кожевников. III Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.* *Решение — в №4–2008*

2074. Посетитель обходит залы музея по следующему правилу. Находясь в некотором зале, он выбирает из всех соседних залов тот, который до этого был посещён им меньшее число раз, и переходит в него (если таких залов несколько, то переходит в любой из них). Из любого зала музея можно пройти в любой другой. Верно ли, что посетитель через некоторое время обойдёт все залы? *С.Г.Волчёнков и П.А.Кожевников.* *Решение — в №4–2008*

2075. Каждое из рёбер выпуклого многогранника параллельно перенесено так, что рёбра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он конгруэнтен исходному? *А.А.Заславский. III Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.* *Решение — в №4–2008*

2076. Найдите все функции f, определённые на всей вещественной оси и удовлетворяющей для любого ненулевого числа x и для любого числа y равенству $xf(y)-yf(x)=$ $=f(y/x)$. *Э.Туркевич.* *Решение — в №4–2008*

2077. Для каждого натурального n найдите такое наименьшее натуральное число k, что в любой таблице размером $n\times n$, заполненной действительными числами, можно так увеличить не более k чисел, чтобы сумма чисел любого столбца стала равна сумме чисел любой строки. *П.А.Кожевников.* *Решение — в №4–2008*

2078. A', B' и C' — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L, расположенных по одну сторону от прямой BB'. Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO, где O — центр вписанной окружности треугольника ABC. *В.Ю.Протасов. III Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.* *Решение — в №4–2008*

2079. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых чисел a, b и c, бóльших 10^{10}, что $a^8+b^8+c^8$ делится на $a^4+b^4+c^4$? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №4–2008*

2080*. Пусть $\overrightarrow{e_1}=(0;1)$, $\overrightarrow{e_2}=(1;0)$ и $\overrightarrow{e_{n+2}}=\overrightarrow{e_{n+1}}+\overrightarrow{e_n}$ для любого натурального n. Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких из векторов этой последовательности (сумма может состоять даже из одного слагаемого и таком случае совпадает с ним). Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с неотрицательными координатами, лежащих внутри некоторой полосы, кроме точки $(0;0)$. *И.Богданов и И.Пушкарёв.* *Решение — в №4–2008*

2081. На доске записаны три положительных числа: x, y и 1. Разрешено дописывать на доску сумму или разность каких-нибудь уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Всегда ли можно получить на доске число а) x^2; б) xy? *Г.А.Гальперин. XXIX Турнир городов.* *Решение — в №5–2008*

2082. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите равенство радиусов описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN и PKN. *А.А.Заславский. XXIX Турнир городов.* Решение — в №5–2008

2083. Полоса состоит из n клеток. Один игрок ставит крестики, другой — нолики. Запрещено одинаковым знакам оказываться в соседних клетках. Запрещено и ставить знак в уже занятую клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его противник? *Б.Р.Френкин. XXIX Турнир городов.* Решение — в №5–2008

2084*. Решите уравнение $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=y^5-1$ в целых числах. *А.Ефимов.* Решение — в №5–2008

2085*. Среди участников некоторого соревнования некоторые дружат между собой, причём это отношение симметрично: если Батин дружит с Ватиным, то и Ватин дружит с Батиным. Множество участников называют кликой, если каждые двое из них дружат. Пусть наибольшее возможное количество людей в клике, состоящей из участников соревнования, чётное. Докажите, что всех участников соревнования можно так рассадить в две комнаты, чтобы наибольшее возможное число людей в клике одной из этих комнат равнялось наибольшему возможному числу людей в клике второй из этих комнат. *В.Астахов, М.Илюхина и Д.Фон-Дер-Флаасс. XLVIII международная олимпиада.* Решение — в №5–2008

2086. Даны арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, ..., состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1=b_1$ и что для каждого натурального n разность a_n-b_n делится на n. Докажите равенство $a_2=b_2$. *Н.Калинин.* Решение — в №6–2008

2087. Шахматная фигура «прожектор» бьёт один из углов, на которые делят доску проходящие через неё горизонталь и вертикаль, включая примыкающие к углу клетки горизонтали и вертикали. Например, прожектор в левом нижнем углу может бить либо одну клетку, либо нижнюю горизонталь, либо левую вертикаль, либо всю доску. Какое наибольшее число прожекторов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? *А.В.Шаповалов.* Решение — в №6–2008

2088. Для положительных чисел x, y и z, сумма которых равна 1, докажите неравенство $\frac{x^2+3xy}{x+y}+\frac{y^2+3yz}{y+z}+\frac{z^2+3zx}{z+x}\leqslant 2$. *Р.Пиркулиев и П.А.Кожевников.* Решение — в №6–2008

2089. D — середина стороны AC треугольника ABC. Точки A_1 и A_2 — центры вписанной и касающейся отрезка AB вневписанной окружности треугольника ABD. Аналогично для треугольника CBD определим точки C_1 и C_2. Докажите, что четырёхугольник $A_1A_2C_2C_1$ вписанный. *Л.Емельянов.* Решение — в №6–2008

2090. Пусть c_1, c_2, ..., c_n — действительные числа, $S_1=c_1$, $S_2=c_1+c_2$, $S_3=c_1+c_2+c_3$, ..., $S_n=c_1+c_2+\ldots+c_n$. Буквами m и M обозначим соответственно минимальное и максимальное из чисел S_1, S_2, ..., S_n. Докажите неравенства:

а) $m\leqslant c_1+\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}+\ldots+\frac{c_n}{n}\leqslant M$;

б) $mn\leqslant nc_1+(n-1)c_2+\ldots+c_n\leqslant nM$;

в) $\alpha_1m\leqslant\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\ldots+\alpha_nc_n\leqslant\alpha_1M$ для любой невозрастающей последовательности положительных чисел α_1, α_2, ..., α_n. *А.А.Егоров.* Решение — в №6–2008

2091. Для любых натуральных чисел m и n, где $n>2$, существуют n попарно взаимно простых чисел, каждое из которых больше 10^{10}, сумма m-х степеней которых делится на их сумму. Докажите это. *В.А.Сендеров.* Решение — в №6–2008

2092. На рёбрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно. Точки K', L', M' и N' симметричны точкам K, L, M и N относительно середин рёбер AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите равенство объёмов тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$. *П.А.Кожевников. Решение — в №6–2008*

2093. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд n одинаковых монет, сам выбирая, какие орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на бумаге любое натуральное число от 1 до n и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает на одну из монет и просит перевернуть её. Затем фокуснику завязывают глаза, он смотрит на ряд монет и пытается определить написанное зрителем число. Найдите все n, для которых у фокусника и его ассистента есть способ гарантированно безошибочно отгадывать число. *С.Грибок, Л.Медников и А.В.Шаповалов. XXIX Турнир городов. Решение — в №6–2008*

2094. На плоскости нарисованы выпуклые многоугольники P и Q. Для каждой из сторон многоугольника P рассмотрим ширину h многоугольника Q в соответствующем направлении (которая определяется следующим образом: зажимаем Q между прямыми, параллельными выбранной стороне многоугольника P, и обозначаем через h расстояние между этими прямыми) и умножим h на длину l выбранной стороны многоугольника P. Просуммировав все произведения hl по всем сторонам многоугольника P, получим некоторую сумму $s(P, Q)$. Докажите равенство $s(P, Q) = s(Q, P)$. *Д.Звонкин. XXIX Турнир городов. Поправка к условию — на странице 17 шестого номера 2008 года. Решение — в №6–2008*

2095. Перед Алёшей — 100 закрытых коробочек, в каждой — либо красный, либо синий кубик. У Алёши на счёте есть рубль. Алёша подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счёте на данный момент). Коробочка открывается, и счёт Алёши увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается до тех пор, пока не будут вскрыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счёте может гарантировать себе Алёша, если ему известно, что синих кубиков ровно n?
А.Буфетов, Л.Медников и А.В.Шаповалов. XXIX Турнир городов. Решение — в №6–2008

2096. Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая — не более чем из 10 человек. Любые 11 комиссий имеют хотя бы одного общего члена. Докажите, что существует человек, входящий во все комиссии. *Ф.Петров. Решение — в№1–2009*

2097. Найдите все такие простые числа p вида $a^2 + b^2 + c^2$, что $a^4 + b^4 + c^4$ делится на p. *В.А.Сендеров. Решение — в №1–2009*

2098. Двое играют, делая ходы по очереди: первый рисует на плоскости многоугольник, не имеющий ни с одним из ранее нарисованных многоугольников общих внутренних точек, а второй раскрашивает очередной многоугольник в один из 2008 цветов. Второй игрок хочет, чтобы любые два многоугольника, граничащие по отрезку, были разных цветов. Может ли первый игрок помешать второму?
Е.Я.Гик и П.А.Кожевников. Решение — в №1–2009

2099. $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_s = 0$ — последовательность целых чисел, причём числа a_0 и a_1 взаимно просты, а все остальные члены последовательности равны остатку от деления предыдущего члена последовательности на предпредыдущий. Построим последовательность $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_{k+1} = b_{k-1} + b_k\left[\frac{a_{k-1}}{a_k}\right]$ при $1 < k < s$. Докажите равенство $b_s = a_0$. *В.Быковский. Решение — в №1–2009*

2100. В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом в точке O пересекает первую окружность в точках A_1 и A_2, а вторую — в точках A_2 и B_2. Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и касательных к ω_2, проведённых из A_1. Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1, проведённых из B_2. *П.А.Кожевников. Решение — в №1–2009*

2101. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что для любого действительного числа x существует такое действительное число y, что $f(y) = f(x) + y$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Д.А.Терёшин. IV этап XXXIV Всероссийской олимпиады. Решение — в №2–2009

2102. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное равно сумме соседей, а каждое синее — полусумме соседей. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю. *И.Богданов. IV этап XXXIV Всероссийской олимпиады.* Решение — в №2–2009

2103. Столбцы таблицы размером $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n. Клетки таблицы заполнены натуральными числами, не превосходящими n, таким образом, что в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа тоже различны. Клетка таблицы хорошая, если написанное в ней число больше номера столбца, в котором эта клетка находится. Для каких n существует расстановка, в которой во всех строках одно и то же количество хороших клеток?

К.Чувилин. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2104. Фокусник угадывает площадь выпуклого 2008-угольника, находящегося за ширмой. Он называет две точки на периметре многоугольника; зрители соединяют эти точки отрезком и сообщают фокуснику меньшую из площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этим отрезком. В качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном фокусником численном отношении. Докажите, что за 2006 таких вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

Н.Х.Агаханов. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2105. Окружность с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На прямой AQ лежит такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает описанные окружности треугольников BPQ и CPQ вторично в точках M и N. Докажите равенство $OM = ON$.

А.Акопян и П.А.Кожевников. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2106. Для каких натуральных чисел $n > 1$ существуют такие натуральные числа b_1, b_2, ..., b_n, что не все они равны между собой и для любого натурального k произведение $(b_1 + k)(b_2 + k)\ldots(b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть больше 1.)

В.В.Произволов и В.А.Сендеров. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2107. H и M — соответственно, точки пересечения высот и медиан неравнобедренного треугольника ABC. В вершинах A, B и C восставлены перпендикуляры к прямым AM, BM и CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведёнными прямыми, лежит на прямой MH.

Л.Емельянов и П.А.Кожевников. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2108. Рассмотрим конечное множество P простых чисел. Докажите существование числа, являющегося суммой p-х степеней натуральных чисел при $p \in P$, и не являющегося суммой p-х степеней натуральных чисел при $p \notin P$.

В.А.Сендеров. XXXIV Всероссийская олимпиада. Решение — в №2–2009

2109. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. P — точка пересечения лучей BA и CD; Q — точка пересечения лучей BC и AD; H — проекция точки D на прямую PQ. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами. *В.Шмаров. XXXIV Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2009

2110*. В блицтурнире участвовали $2n + 3$ шахматиста. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что хотя бы один из шахматистов, игравших первую партию, играл и последнюю. *А.Грибалко. XXXIV Всероссийская олимпиада.* Решение — в №2–2009

2111. Одна из клеток клетчатой полосы окрашена. Вначале фишка находится на расстоянии n клеток от окрашенной. Бросается игральная кость, и в случае выпадения k очков, где $1 \leqslant k \leqslant 6$, фишка перемещается на k клеток по направлению к окрашенной клетке. Процесс продолжается, пока фишка не попадает в окрашенную клетку (выигрыш), или пока не проскочит окрашенную клетку (проигрыш). а) При каком натуральном n вероятность выигрыша наибольшая? б) Найдите эту наибольшую вероятность. *В.Лецко.* *Решение — в №3–2009*

2112. H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящую через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2; окружность с центром в середине стороны CA, проходящую через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2; окружность с центром в середине стороны AB, проходящую через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности. *А.Гаврилюк. XLIX Международная олимпиада.* *Решение — в №3–2009*

2113. Многочлен степени n, где $n > 1$, имеет различные корни x_1, x_2, ..., x_n, а его производная — корни y_1, y_2, ..., y_{n-1}. Докажите, что среднее арифметическое квадратов чисел x_1, x_2, ..., x_n больше среднего арифметического квадратов чисел y_1, y_2, ..., y_{n-1}. *М.Мурашкин. XXIX турнир городов.* *Решение П.А.Кожевникова — в №3–2009*

2114. Существует бесконечно много таких натуральных чисел, не делящихся на 10, что все ненулевые цифры десятичных записей их квадратов нечётны. Докажите это. *В.А.Сендеров.* *Решение — в №3–2009*

2115. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, причём $BA \neq BC$ и существует окружность, касающаяся продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C и прямых AD и CD. Докажите, что на этой окружности пересекаются общие внешние окружности к вписанным окружностям треугольников ABC и ADC. *В.Шмаров. XLIX Международная олимпиада.* *Решение И.Богданова — в №3–2009*

2009 год

2116. Полный набор домино выкладываем на столе в замкнутую цепь, и для всех пар соседних доминошек вычисляем модуль разности очков на клетках, которыми они соприкасаются. Каково наибольшее возможное значение суммы всех 28 таких модулей разностей? *А.Грибалко.* *Решение — в №4–2009*

2117. Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых является 2009-й степенью натурального числа? *Г.А.Гальперин.* *Решение — в №4–2009*

2118. Расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC, величина угла A которого равна 120°, до ортоцентра (точки пересечения высот) равно $AB+AC$. Докажите это. *В.Ю.Протасов.* *IV Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.* *Решение П.А.Кожевникова — в №4–2009*

2119. Первый член бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ... равен 1. Если $n > 1$ и наибольший нечётный делитель числа n даёт остаток 1 при делении на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$; если же наибольший нечётный делитель числа n даёт остаток 3 при делении на 4, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что все члены рассматриваемой последовательности положительны, причём каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз. *А.А.Заславский. XXX Турнир городов.* *Решение П.А.Кожевникова — в №4–2009*

2120. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что график функции $y = P(x)$ имеет центр симметрии. *А.В.Шаповалов. XXX Турнир городов.* *Решение С.А.Дориченко и П.А.Кожевникова — в №4–2009*

2121. Каждые две противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Назовём высотами шестиугольника векторы с концами на прямых, содержащих противоположные стороны, перпендикулярные им и направленные от AB к DE, от EF к BC и от CD к AF. Докажите, что вокруг шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его высот равна нулевому вектору. *А.А.Заславский. IV Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.* *Решение — в №4–2009*

2122. Любое натуральное число n, большее 17, представимо в виде суммы трёх натуральных попарно взаимно простых слагаемых, каждое из которых больше 1.

б*) Выясните, конечно или бесконечно множество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх взаимно простых в совокупности натуральных слагаемых, никакие два из которых не взаимно просты. *В.Лецко.* *Решение В.А.Сендерова — в №4–2009*

2123. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый из которых есть два варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя вопрошать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки, и ответить на все вопросы при 25-й попытке? *В.Клепцын. XXX Турнир городов.* *Решение С.А.Дориченко — в №4–2009*

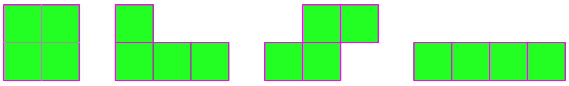
2124. n — натуральное число; $n > 2$; x_1, x_2, ..., x_n — положительные числа, удовлетворяющие равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \ldots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2$. При каких n непременно $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$? *В.А.Сендеров.* *Решение — в №5–2009*

2125. Вписанная в треугольник окружность ω касается сторон CA и AB в точках B' и C' соответственно. Точка D, отличная от B' и C', находится на расстоянии AC' от точки A. Прямые DB' и DC' пересекают второй раз окружность ω в точках

B'' и C''. Докажите, что $B''C''$ — диаметр окружности ω, перпендикулярный отрезку AD.
Р.Г.Женодаров. Решение — в №5–2009

2126. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка удачная, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, — друзья. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?
П.А.Кожевников. Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады. Решение — в №5–2009

2127. Внутри ветви гиперболы, заданной равенством $x=\sqrt{y^2+1}$, расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что при каждом $n>1$ окружность ω_n касается гиперболы в двух точках и касается окружности ω_{n-1}, а окружность ω_1 радиуса 1 касается гиперболы в точке $(1;0)$. Докажите, что для любого натурального n радиус окружности ω_n — натуральное число. *В.Расторгуев. Решение — в №5–2009*



2128. Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице размером 10×10. Всегда ли Петя может вырезать из этой таблицы по линиям сетки 19 фигурок, каждая из которых — одного из четырёх видов, показанных на рисунке, таким образом, чтобы фигурки не содержали ни одной отмеченной клетки? *И.Богданов и О.Подлипский. Решение — в №5–2009*

2129. Найдите все такие пары натуральных чисел n и k, что $n>1$ и $1^n+2^n+\ldots+$ $+(n-1)^n=n^k$. *В.А.Сендеров. Первая президентская олимпиада Казахстана. Решение — в №5–2009*

2130. $ABCDEF$ — плоский невыпуклый шестиугольник, $AB=DE$, $BC=EF$, $CD=$ $=FA$, $\angle FAB=3\angle CDE$, $\angle BCD=3\angle EFA$, $\angle DEF=3\angle ABC$ (здесь имеются в виду внутренние углы многоугольника, некоторые из них могут быть больше 180°). Никакие две стороны стороны шестиугольника не параллельны. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.
Н.Белухов (Болгария). Болгарский журнал «Математика». Решение — в №5–2009

2131. Пусть $a\hat{}b$ обозначает a^b. Можно ли в выражении $7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7$ двумя разными способами расставить скобки так, чтобы порядок действий был вполне определён и результаты были одинаковы?
А.К.Толпыго. Весенний тур XXX Турнира городов. Решение — в №6–2009

2132. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает чётное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит чётное число отрезков.
И.Богданов и Г.А.Гальперин. Весенний тур XXX Турнира городов. Решение — в №6–2009

2133. Замок обнесён круговой стеной с девятью башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все рыцари переходят на соседние башни, причём каждый рыцарь всё время движется либо по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы по два рыцаря, и был час, когда ровно на пяти башня дежурили по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда хотя бы на одной из башен не было ни одного рыцаря.
М.Мурашкин. Весенний тур XXX Турнира городов. Решение — в №6–2009

2134. Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых — четырёхугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две остальные грани). Докажите, что если вокруг одного из шестигранников можно описать сферы, то и любой другой шестигранник вписан в сферу.
В.В.Произволов. Весенний тур XXX Турнира городов. Решение — в №6–2009

2135. Для каких n существует не являющееся квадратом число, которое превращается в квадрат при приписывании к нему слева числа, оканчивающегося на 2009 нулей?
Н.Х.Агаханов. *Решение — в №6–2009*

2136. Для любых натуральных чисел $k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m имеют отличный от 1 общий делитель. Докажите это. *Весенний тур XXX Турнира городов.* *Решение — в №6–2009*

2137. H, I и O — соответственно, ортоцентр (точка пересечения высот) и центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC. Докажите, что если точки A, O, I и H лежат на одной окружности, то она проходит и хотя бы через одну из вершин B и C. *П.А.Кожевников.* *Решение — в №6–2009*

2138. В ячейку памяти компьютера записали число 6. Компьютер на n-м шаге увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Таким образом получаем последовательность чисел 6, 7, 8, 9, 10, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 33, ... Докажите, что на каждом шаге число в ячейке увеличивается либо на 1, либо на простое число. *М.Франк. Весенний тур XXX Турнира городов.* *Решение — в №6–2009*

2139. Можно ли так раскрасить натуральные числа в 2009 цветов, чтобы каждый цвет встречался бесконечно много раз и не нашлось бы трёх чисел, покрашенных в три разных цвета и таких, что наибольшее из них равно произведению двух остальных?
Н.Агаханов. XXXV Всероссийская олимпиада

2140. Восемь клеток диагонали a1–h8 назовём забором. Ладья ходит по доске, не оказываясь ни на какой клетке более одного раза и не ходя на клетки забора. Какое наибольшее «число прыжков через забор» может она совершить?
Р.Женодаров. XXXV Всероссийская олимпиада

2141. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AC в точке D, а описанную окружность Ω треугольника ABC — в точке E. Из точки F окружности Ω отрезок DE виден под прямым углом. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, пересекает отрезок AC в его середине.
Л.Емельянов. XXXV Всероссийская олимпиада

2142. Сколько раз функция $\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ldots\cos\frac{x}{2009}$ меняет знак на отрезке $\left[0;\frac{2009\pi}{2}\right]$?
Б.Трушин. XXXV Всероссийская олимпиада

2143. В королевстве n городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются *соседними*). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды король провел такую реформу: каждый из n мэров городов стал снова мэром одного из n городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что существует город, в котором мэр после реформы не поменялся, или пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

Другими словами, рассмотрим автоморфизм дерева, то есть такую перестановку его вершин, что любые две вершины, соединённые ребром, переходят в вершины, тоже соединённые ребром. Докажите, что если ни одна вершина не остаётся на месте, то существуют такие две вершины, которые автоморфизм меняет местами.
В.Дольников. XXXV Всероссийская олимпиада

2144. По кругу расположены 100 напёрстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней напёрстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

Б.Трушин. XXXV Всероссийская олимпиада

2145. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2;100]$. Докажите, что хотя бы для одного натурального числа n число $x^{2^n}+y^{2^n}$ — составное.

С.Берлов и А.Белов. XXXV Всероссийская олимпиада

2146. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трёхчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него? *Н.Агаханов и И.Богданов*

2147. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что существует бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда существует бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами. *Е Знак*

2148. По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 в некотором порядке. Петя вычислил 100 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшую из этих сумм. Какое наибольшее число могло быть написано на доске? *П.Кожевников*

2149. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADC=2\angle ABC$. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до внешней биссектрисы угла ADC равно $AD+DC$.

С.Берлов. Олимпиада имени Леонарда Эйлера

2150. В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго. *Н.Гравин. Олимпиада имени Леонарда Эйлера*

2151. Числовой треугольник составлен по следующему правилу. В первой строке одно число, равное 1. В k-й строке ($k=2$, 3, 4, ...) записываем $2k-1$ чисел, каждое из которых равно сумме трёх чисел: числа, стоящего над ним, и двух его соседей в предыдущей строке (если некоторых из таких трёх чисел нет, то этих соседей считаем равными 0). Докажите, что в среднем столбце не встретится ни одного числа, дающего остаток 2 при делении на 3.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
\multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

К.Каибханов

2152*. Пару (p,q) различных простых чисел называем *особой*, если существует a, представимое в виде $a=x^p+y^p=z^q+t^q$ для некоторых натуральных x, y, z, t, но не представимое в виде $u^{pq}+v^{pq}$, где u и v — натуральные числа. Докажите, что любое простое число p входит в бесконечное число особых пар. *В.Сендеров*

2153*. Сумма величин телесных углов при вершинах выпуклого многогранника равна π. Докажите, что существует замкнутый маршрут по его рёбрам, проходящий через каждую его вершину ровно один раз. (Телесный угол как величина многогранного угла измеряется площадью фигуры, высекаемой этим многогранным углом на единичной сфере. Площадь всей единичной сферы равна 4π.)

И.Богданов. Решение — в статье «О сумме телесных углов многогранника» третьего номера 2010 года

2154. Каждая клетка доски размером 2009×2009 покрашена в один из двух цветов так, что у каждой клетки соседей (по стороне) своего цвета меньше, чем соседей другого цвета. Какое наибольшее значение может принимать разность между количеством клеток одного и другого цветов? *А. Шаповалов.* *Решение — в №3–2010*

2155. Найдите 2009-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально. *И. Богданов.* *Решение — в №3–2010*

2156. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырёхугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырёхугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Обязательно ли четырёхугольники Васи и Пети равны? *Н. Агаханов и И. Богданов.* *Решение — в №3–2010*

2157. На доске выписано 20 делителей числа $70!$. Докажите, что можно стереть некоторые из них так, чтобы произведение оставшихся являлось полным квадратом. *Решение П.А. Кожевникова — в №3–2010*

2158. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q — внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M — середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ — окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что $OP = OQ$. *С. Берлов. L Международная олимпиада.* *Решение — в №3–2010*

2159*. Найдите все такие пары чисел (k, c), где k — натуральное, c — целое, что для всех натуральных n кроме, быть может, конечного их числа, число $n(n+1)\dots(n+k-1)+c$ является точной степенью (большей 1 и может быть, зависящей от n) натурального числа. *В. Сендеров*

2160*. Даны попарно различные положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, а также множество M, состоящее из $n-1$ числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам $a_1, a_2, \dots, a_n$, взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не приземлился в точке, имеющей координату из множества M.
Д. Храмцов, К. Рейер (Германия). L Международная олимпиада. *Решение И. Богданова — в №3–2010*

2010 год

2161. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.) *Е.Горинов. XXXI Турнир городов.* *Решение Л.Медникова и А.Шаповалова — в №4–2010*

2162. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовём *хорошим*. Паролем сейфа является хороший код. Сейф откроется, если введён хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?
Д.Баранов. *Решение Д.Баранова и П.Кожевникова — в №4–2010*

2163. Найдите все такие натуральные числа a и b, что

а) $(a+b^2)(b+a^2)$ является точной степенью двойки;

б) $(a+b^3)(b+a^3)$ является точной степенью тройки.
В.Произволов. XXXI Турнир городов. *Решение В.Произволова и П.Кожевникова — в №4–2010*

2164. а) На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов $n \times n$ клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечётным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем n^2.

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2009 одинаковых единичных квадратов, стороны которых параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечётным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.
И.Пак и Ю.Рабинович. XXXI Турнир городов. *Решение П.Кожевникова — в №4–2010*

2165. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PB симметрична относительно биссектрисы угла KPL медиане треугольника KPL, проведённой из вершины P.
Ю.Блинков. Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина. *Решение В.Омельяненко — в №4–2010*

2166. Обозначим через $[n]!$ произведение $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ — всего n сомножителей.

Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]!\cdot[m]!$.
М.Берштейн. XXXI Турнир городов. *Решение Л.Медникова и А.Шаповалова — в №4–2010*

2167*. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором ещё не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *XXXI Турнир городов.* *Решение А.Шаповалова — в №4–2010*

2168*. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Пусть R_1 — радиус окружности, касающейся отрезков AB, AD и окружности ω, R_2 — радиус окружности, касающейся отрезков CB, CD и окружности ω. Проводятся всевозможные дуги окружности BD, разбивающие четырёхугольник на два криволинейных треугольника. Докажите, что сумма радиусов, вписанных в эти криволинейные треугольники, не зависит от выбора дуги BD тогда и только тогда, когда $R_1 = R_2$.

А.А.Заславский. Решение Н.Белухова, И.Богданова и П.Кожевникова — в №4–2010

2169. Каждая сторона остроугольного треугольника ABC меньше соответствующей стороны треугольника $A'B'C'$. Докажите, что $R < R'$, где R и R' — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно.

П.А.Кожевников

2170. Окружность пересекает график функции $y = x^3 - 2009x$ в шести точках. Найдите сумму абсцисс этих точек. *И.Богданов*

2171. Можно ли разбить при каком-то натуральном k все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

Н.Агаханов. Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

2172. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

Д.Прокопенко. Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

2173. $p > 3$ — простое число, a и b — такие целые числа, что $a^2 + ab + b^2$ делится на p. Докажите, что $(a+b)^p - a^p - b^p$ делится а) на p^2; б*) на p^3. *Б.Лурье*

2174. а) Существуют ли четыре конгруэнтных многоугольника, любые два из которых граничат по отрезку и не имеют общих внутренних точек?

б) Тот же вопрос для четырёх конгруэнтных выпуклых многоугольников.

С.Маркелов

2175. Пусть S — множество из n действительных чисел, лежащих на отрезке $[0,1]$. Для некоторого k, где $0 < k < n$, *хорошим* называем k-элементное подмножество A множества S, если разность между средним арифметическим k чисел, лежащих в A, и средним арифметическим $n-k$ чисел из S, не лежащих в A, не превосходит $\frac{n}{2k(n-k)}$. Докажите, что среди всех k-элементных подмножеств множества S доля хороших подмножеств составляет не менее $2/n$. *А.Бадзян*

2176. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Докажите, что медианы треугольников ABM, ADN и CMN, проведённые соответственно из вершин B, D и C, пересекаются в одной точке. *Д.Храмцов*

2177. Существует ли такой угол α, что для любого натурального n число $\cos n\alpha$ рационально, а число $\sin n\alpha$ иррационально? *В.А.Сендеров*

2178. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между некоторыми двумя городами, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

С.Берлов. II олимпиада имени Леонарда Эйлера

2179. В вершинах куба расставили числа 1^2, 2^2, ..., 8^2 (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

Д. Г.Фон-Дер-Флаасс. II олимпиада имени Леонарда Эйлера

2180. Многочлен x^{2010} разделили на многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ с остатком. В качестве неполного частного был получен многочлен $P(x)$. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)$ положительны.
И. Богданов

2181*. Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Каждое из чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n!$ принадлежит хотя бы одной из прогрессий. Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из этих прогрессий. На сколько можно уменьшить число $2n!$, чтобы утверждение осталось верным?
По мотивам задачи с Romanian Masters

2182*. Дан выпуклый четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждого $i=1, 2, 3, 4$ рассмотрим окружность ω_i, лежащую вне четырёхугольника, касающуюся прямых $A_{i-1}A_i$, $A_{i+1}A_{i+2}$, и касающуюся отрезка A_iA_{i+1} в точке T_i (индексы рассматриваются по модулю 4, так что $A_0=A_4$, $A_5=A_1$ и $A_6=A_2$). Докажите, что прямые A_1A_2, A_3A_4 и T_2T_4 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые A_2A_3, A_4A_1 и T_1T_3 пересекаются в одной точке.
П. Кожевников. Международная олимпиада Romanian Master of Mathematics

2183*. Дано натуральное число n. Назовём множество K, состоящее из точек плоскости с целыми координатами, *связным*, если для любых двух точек R и S множества K существуют натуральное m и такая последовательность точек $R=T_0$, T_1, $\ldots$, $T_m=S$, принадлежащих K, что длина любого отрезка вида T_kT_{k+1} равна 1. Для связного множества K обозначим через $\delta(K)$ количество элементов множества $\Delta(K)=\left\{\overrightarrow{RS} \mid R, S \in K\right\}$. Найдите максимально возможно значение $\delta(K)$, если K пробегает все связные множества из $2n+1$ точек плоскости с целыми координатами.
Г. Челноков. Международная олимпиада Romanian Master of Mathematics

2184. Если любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком $y=f(x)$ столько же общих точек, сколько с параболой $y=x^2$, то функция $f(x)$ тождественно равна x^2. Докажите это.
А.В. Шаповалов. XXXI Турнир городов

2185. Основание $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, где $n>4$, а все боковые грани — равнобедренные треугольники (не обязательно с вершиной S). Обязательно ли эта пирамида правильная?
Г.А. Гальперин. XXXI Турнир городов

2186. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?
С.В. Маркелов. XXXI Турнир городов

2187. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке D. Докажите, что прямая DH перпендикулярна медиане, проведённой из вершины B.
Восьмиклассник С. Ильясов, город Алматы

2188. На плоскости лежит игла. Разрешено поворачивать иглу на 45° вокруг любого из её концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом её концы поменялись местами?
А. Грибалко. XXXI Турнир городов

2189. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?
А. Клячко и Е. Френкель. XXXI Турнир городов

2190. Дано натуральное число. Разрешено расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12\,345+6+789=13\,140$). С полученным числом снова разрешено выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

А. Толпыго. XXXI Турнир городов

2191. Дано натуральное $n>1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n+1$, и не делится ни на одно другое простое число.

И. Богданов. XXXI Турнир городов

2192. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω — в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой. *Л. Емельянов*

2193. В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовём *хорошим*, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешено одновременно закрасить все клетки хорошего прямоугольника. Одну клетку запрещено закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел? *П. Зусманович и Ф. Петров*

2194. В буфете лежат 100 яблок суммарного веса 10 кг, каждое весит не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы любой кусок яблока весил не меньше 25 г. *К. Кноп и И. Богданов*

2195. Даны $n\geqslant 3$ попарно взаимно простых чисел. При делении произведения любых $n-1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r\leqslant n-2$. *В. Сендеров*

2196. Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости? *И. Богданов и О. Подлипский*

2197. Многочлен $P(x)$ степени $n>2$ имеет n вещественных корней $x_1<x_2<\ldots<x_n$, причём $x_2-x_1<x_3-x_2<\ldots<x_n-x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y=|P(x)|$ на отрезке $[x_1,x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1},x_n]$.

И. Богданов

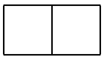
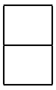
2198*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно.

а) Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка пересечения прямых из пункта а) лежит на прямой OK.

И. Богданов и П. Кожевников

2199. Натуральное число, имеющее в десятичной записи n цифр, назовём *n-драконом*, если оно является точным квадратом и для любого $k=1, 2, \ldots, n-1$ после вычеркивания k последних цифр («отрубаем хвост дракону») оно становится точным квадратом. Для какого наибольшего n существует n-дракон? *В. Сендеров*

2200. Таблица 2×2010 (2 горизонтальных ряда по 2010 клеток) разделена на единичные клетки. Иван ставит горизонтальное домино , которое покрывает в точности две клетки таблицы; затем Пётр ставит вертикальное домино , которое покрывает две клетки таблицы; затем Иван снова ставит горизонтальное домино, Пётр снова ставит вертикальное домино, и так далее (каждый раз домино можно ставить только на ещё не покрытые клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Попробуйте изучить эту игру на таблице $2\times n$ при различных других значениях n.

Э. Колев (Болгария). Болгарская олимпиада 2010 года

2201. Рассматриваются прямые, проходящие через вершину B треугольника ABC, пересекающие сторону AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC — в точке M, отличной от B. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

Ю. Блинков. VI Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина

2202. Дана арифметическая прогрессия из 22 различных натуральных чисел, каждое из которых является точной степенью (то есть степенью натурального числа, большей 1). Докажите, что разность этой прогрессии больше 2010. *П. Кожевников*

2203. Дан правильный mn-угольник. Среди его вершин m вершин покрашено красным, а n — синим. Никакая вершина не покрашена дважды. Докажите, что длина некоторого отрезка с концами в красных точках равна длине некоторого отрезка с концами в синих точках. *И. Богданов и С. Берлов*

2204. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности. Прямая l проходит через вершину A, пересекает отрезок BC в точке M и луч DC — в точке N. Пусть I_1, I_2, I_3 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA. Докажите, что прямая l проходит через точку пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$. *Н. Белухов (Болгария)*

2205*. Функция $g(x)$ — такая периодическая функция с периодом 1, что

$$g(x)=\begin{cases}4x-1, \text{если } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ -4x-1, \text{если } -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

Другими словами, она определена равенством $g(x)=4\min(\{x\},1-\{x\})-1$, где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Пусть $f(x)=x+g(x)$. Для каждого действительного числа t определим последовательность $\{s_n(t)\}$ следующим правилом: $s_0(t)=t$ и $s_{n+1}(t)=f(s_n(t))$ при $n\geqslant 0$. Докажите существование такого числа t, что последовательность $\{s_n(t)\}$ всюду плотна (то есть для любых чисел $a<b$ есть такой номер n, что $a<s_n(t)<b$). *Д.Г. Фон-Дер-Флаасс*