

4. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если его сторона  $BC$  равна 4, а углы  $A$  и  $B$  равны соответственно  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{8}$ .

5. Найдите рациональное число, равное выражению

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}.$$

6. На плоскости расположен отрезок  $AB$  длины 24 и две точки  $P, Q$ . Точка  $P$  равноудалена от  $A$  и  $B$  на расстояние 15, а точка  $Q$  также равноудалена от  $A$  и  $B$ , но на расстояние 20. Найдите длину отрезка  $PQ$ , если известно, что она меньше длины отрезка  $AB$ .

7. Из деревни Аниково в деревню Волково вышел пешеход. Через 20 минут ему вслед выехал велосипедист и приехал в Волково на 5 минут раньше пешехода. Какую долю пути прошел пешеход к моменту встречи с велосипедистом, если они все время двигались с постоянными скоростями?

8. Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в  $45^\circ$ . Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найдите длину радиуса окружности.

9. Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 8x - 3y, \\ y^2 + 2xy = 3x - 2y. \end{cases}$$

11. Ребра куба равны 1. Найдите расстояние между серединами его скрещивающихся ребер.

12. Найдите все положительные числа  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$\log_3(x+1) \cdot \log_2(x^2 + 3x + 6) \leq 4.$$

#### ФИЗИКА

В 2010 году олимпиада «Ломоносов» и профильный экзамен по физике в МГУ впервые проводились в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику, 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий олимпиады и профильного экзамена, сгруппированные по разделам программы.

## Механика

### Задание 1

**Вопрос.** Дайте определение центра масс системы материальных точек. Запишите формулу для импульса системы материальных точек.

**Задача.** Вырезанную из однородного листа металла пластинку в форме равностороннего треугольника  $ABC$  (рис.1)

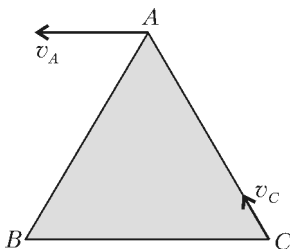


Рис. 1

положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули. В момент времени  $t = 0$  оказалась, что скорость  $\vec{v}_A$  вершины  $A$  этого треугольника перпендикулярна биссектрисе угла  $BAC$ , а скорость вершины  $C$  направлена вдоль стороны  $AC$ . Определите перемещение  $\Delta \vec{r}$  центра треугольника за время  $\tau$  после указанного момента.

### Задание 2

**Вопрос.** Что такое трение покоя и трение скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

**Задача.** На наклонной плоскости, составляющей с горизонтальной поверхностью угол  $\alpha$ , покоится брусок. Его можно сдвинуть с места силой  $\vec{F}_0$ , направленной вдоль наклонной плоскости вверх, либо силой  $\vec{F}_1$ , направленной горизонтально перпендикулярно направлению силы  $\vec{F}_0$ , причем  $F_1 = kF_0$ . Определите коэффициент трения бруска о наклонную плоскость  $\mu$ , если  $k = 0,2$ , а  $\alpha = \arctg 0,3$ .

### Задание 3

**Вопрос.** Дайте определение упругих деформаций. Сформулируйте закон Гука.

**Задача.** Колесо состоит из тонкого обода массой  $M$  и радиусом  $R$  и радиально расположенных спиц, соединяющих обод с втулкой, в которую вставлена ось (рис.2). На одну из спиц надета легкая пружина жесткостью  $k$ , один конец которой закреплен на втулке. К другому концу пружины прикреплен маленький шарик массой  $m$ , также надетый на спицу. В недеформированном состоянии длина пружины равна  $l$  ( $l < R$ ). Колесо

располагают горизонтально и закрепляют ось вращения. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы медленно раскрутить колесо до такой угловой скорости, при которой шарик коснется обода? Считайте, что спицы гладкие и невесомые. Трением в оси и диаметром втулки можно пренебречь.

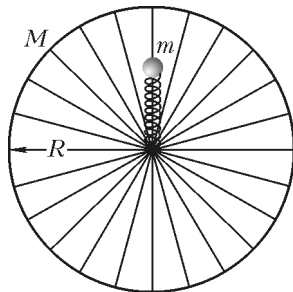


Рис. 2

#### Задание 4

**Вопрос.** Дайте определение равнопеременного прямолинейного движения. Приведите зависимости координаты и скорости тела от времени при равнопеременном движении.

**Задача.** К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью  $k = 10 \text{ Н/м}$  подвешена гиря массой  $m = 1 \text{ кг}$ . В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением  $a = 1 \text{ м/с}^2$ . Какой путь  $s$  пройдет кабина относительно шахты лифта к тому моменту, когда длина пружины в первый раз станет максимальной?

#### Задание 5

**Вопрос.** Дайте определение гармонических колебаний. Что такое амплитуда и фаза гармонических колебаний?

**Задача.** Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол  $\alpha_0 = 1 \text{ рад}$  и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найдите максимальное значение  $v_{y \max}$  модуля вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника  $l = 0,4 \text{ м}$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

#### Задание 6

**Вопрос.** Дайте определение периода колебаний. Запишите формулу для периода колебаний груза на пружине.

**Задача.** В U-образную трубку постоянного сечения, колена которой расположены вертикально, налили жидкость массой  $m = 50 \text{ г}$ . Определите период  $T$  колебаний жидкости в трубке, возбуждаемых небольшим смещением уровней от положения равновесия. Площадь поперечного сечения трубки  $S = 1 \text{ см}^2$ , плотность жидкости  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . Сжимаемостью жидкости и ее трением о стенки трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

## Молекулярная физика и термодинамика

### Задание 1

**Вопрос.** Дайте определение идеального газа. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

**Задача.** На металлическую пластинку напыляют серебряное покрытие, используя пучок атомов серебра, направленный перпендикулярно пластинке. С какой скоростью  $v_0$  растет толщина покрытия, если атомы серебра оказывают на пластинку давление  $p = 0,1$  Па? Кинетическая энергия одного атома серебра в пучке  $E = 10^{-17}$  Дж, молярная масса серебра  $M = 108$  г/моль, его плотность  $\rho = 10,5$  г/см<sup>3</sup>. Постоянная Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

### Задание 2

**Вопрос.** Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы. Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

**Задача.** В двух одинаковых сосудах, соединенных между собой короткой тонкой трубкой с краном, находится гелий. Средняя квадратичная скорость теплового движения атомов гелия в первом сосуде  $v_1$ , а во втором  $v_2$ . Пренебрегая теплообменом гелия с окружающими телами, найдите отношение давления  $p_k$ , которое установится в сосудах после открывания крана, к начальному давлению  $p_1$  в первом сосуде, если масса гелия во втором сосуде была в  $n$  раз больше, чем в первом.

### Задание 3

**Вопрос.** Дайте определение количества теплоты. Сформулируйте первый закон термодинамики.

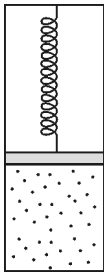


Рис. 3

**Задача.** В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится идеальный одноатомный газ (рис.3). В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной жесткостью  $k = 100$  Н/м, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра. Пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда  $h = 0,2$  м. Найдите количество теплоты  $\Delta Q$ , которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда

удвоилось. Теплоемкостью сосуда, теплообменом с окружающей средой и трением можно пренебречь.

#### *Задание 4*

**Вопрос.** Что такое насыщенный водяной пар? Дайте определение влажности и относительной влажности воздуха.

**Задача.** Стакан объемом  $V_0 = 290 \text{ см}^3$  перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину  $h = 5 \text{ м}$ . При этом объем воздуха в стакане оказался равным  $V_1 = 194 \text{ см}^3$ . Найдите парциальное давление  $p$  водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха  $f = 60\%$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , плотность воды  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Температуру воздуха в стакане считайте постоянной. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения можно пренебречь.

#### *Задание 5*

**Вопрос.** Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Чему равно максимальное значение КПД?

**Задача.** Определите массу  $M$  воды с начальной температурой  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ , которая превратится в лед при той же температуре за  $\tau = 2 \text{ ч}$  работы холодильной машины, если температура радиатора холодильной машины  $T = 373 \text{ К}$ . Холодильная машина работает по циклу Карно, мощность ее двигателя  $N = 0,6 \text{ кВт}$ . Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334 \text{ Дж/г}$ .

#### *Задание 6*

**Вопрос.** Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

**Задача.** В цилиндре под поршнем находятся воздух, водяной пар и вода. Число молей воздуха в  $n = 3$  раза превышает число молей водяного пара, а масса воды равна массе водяного пара. Объем смеси изотермически увеличивают до тех пор, пока вся вода не испарится. Определите отношение давлений в цилиндре в конечном и начальном состояниях.

### **Электродинамика**

#### *Задание 1*

**Вопрос.** Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей. Чему равна напряженность электростатического поля равномерно заряженной проводящей сферы?

**Задача.** Три концентрические проводящие сферы, имеющие радиусы  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ , находятся в вакууме. Внутренняя сфера несет заряд  $q$ , средняя сфера не заряжена, а внешняя заземлена. Какое количество теплоты  $\Delta Q$  выделится после соединения внутренней сферы со средней сферой проводником, имеющим достаточно большое сопротивление?

*Задание 2*

**Вопрос.** Дайте определение емкости. Запишите формулу для емкости плоского конденсатора.

**Задача.** Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 100$  В, состоит из двух квадратных обкладок площадью  $S = 1 \text{ м}^2$  каждая, расположенных на расстоянии  $d = 1$  мм друг от друга. Между обкладками находится диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 5$ , заполняющая весь объем конденсатора. Пластинку начинают выдвигать вдоль одной из сторон конденсатора с постоянной скоростью  $v_0 = 2$  см/с. Какой по величине и направлению электрический ток  $I$  будет течь в цепи источника при этом? Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

*Задание 3*

**Вопрос.** Как определяются работа и мощность электрического тока? Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

**Задача.** При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением  $r = 0,16$  Ом в нагревательном элементе выделяется мощность  $P_1 = 200$  Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила  $P_2 = 288$  Вт. Найдите ЭДС  $\mathcal{E}$  аккумулятора.

*Задание 4*

**Вопрос.** Какими носителями заряда создается электрический ток в электролитах? Сформулируйте законы электролиза.

**Задача.** Электроды, подключенные к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 5$  В, погружены в водный раствор серной кислоты. Изменяя расстояния между электродами, их установили так, что батарея стала отдавать во внешнюю цепь максимальную мощность. Определите эту мощность  $P$ , если за время  $\tau = 50$  мин при электролизе выделяется  $m = 0,3$  г водорода. Поляризацией электродов при электролизе можно пренебречь. Элементарный заряд  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл, постоянная Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

### Задание 5

**Вопрос.** Как определяются модуль и направление вектора магнитной индукции? Сформулируйте закон Ампера.

**Задача.** Металлический стержень массой  $m = 7,5$  г и длиной  $L = 30$  см подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной  $l = 15$  см каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально и равна  $B = 57$  мТл. По стержню пропускают кратковременный прямоугольный импульс постоянного тока силой  $I_0$  и длительностью  $\tau = 0,1$  с. При каком минимальном значении  $I_0$  стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси, проходящей через точки подвеса гибких проводников? Считайте, что смещение стержня за время  $\tau$  ничтожно мало. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

### Задание 6

**Вопрос.** Дайте определение напряженности электрического поля. Что такое силовые линии электрического поля?

**Задача.** Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл по окружности радиусом  $R = 4$  м. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность которого направлена параллельно вектору магнитной индукции и равна  $E = 10$  В/м. Через какое время  $\Delta t$  после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в  $n = 2$  раза? Силу тяжести не учитывайте.

## Оптика

### Задание 1

**Вопрос.** Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы преломления света.

**Задача.** Рыбак стоит на гладком прозрачном льду и смотрит вертикально вниз. Кажущееся рыбаку расстояние от верхней поверхности льда до дна озера равно  $L$ . Определите действительную глубину озера  $H$  (от верхней поверхности льда до дна), если толщина льда  $h$ , показатель преломления льда  $n_{\text{л}}$ , показатель преломления воды  $n_{\text{в}}$ .

### Задание 2

**Вопрос.** Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое такой линзой?

**Задача.** В фокальной плоскости тонкой собирающей линзы расположен экран. На главной оптической оси линзы, перпендикулярной экрану, находится точечный источник света. На экране при этом наблюдается кольцевая неосвещенная область. На каком расстоянии  $d$  от линзы находится точечный источник, если площадь неосвещенной области в  $n$  раз больше площади линзы, а фокусное расстояние линзы равно  $F$ ?

*Задание 3*

**Вопрос.** Дайте определение фокусного расстояния и оптической силы линзы. Запишите формулу тонкой линзы.

**Задача.** На выпуклую поверхность тонкой плосковыпуклой линзы падает узкий пучок световых лучей, параллельный ее главной оптической оси (рис.4). На небольшом расстоянии от плоской поверхности линзы помещают параллельно ей плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной  $d = 9,8$  мм с показателем преломления  $n = 1,4$ . На какое расстояние  $l$  сместится вдоль главной оптической оси линзы точка, в которой фокусируется пучок? Углы падения и преломления света считайте малыми.

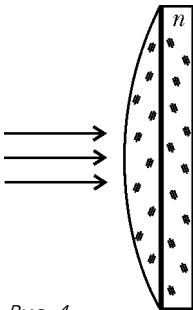


Рис. 4

*Задание 4*

**Вопрос.** Укажите, в каких физических явлениях проявляются волновые свойства света, а в каких – корпускулярные.

**Задача.** Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через прямоугольную стеклянную призму  $\Pi$  с

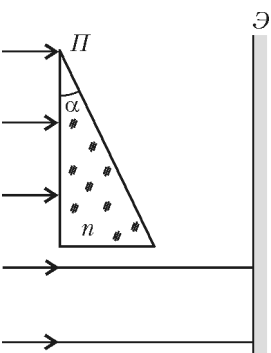


Рис. 5

малым углом  $\alpha$  при вершине, а частично – мимо призмы (рис.5). Лучи света падают на призму перпендикулярно грани, прилегающей к углу  $\alpha$ . Показатель преломления стекла равен  $n$ . Волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют на экране  $\mathcal{E}$ , который расположен перпендикулярно падающим на призму лучам. Определите расстояние  $\Delta x$  между соседними максимумами в интерференционной картине, если длина волны света равна  $\lambda$ .



### Задание 5

**Вопрос.** Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

**Задача.** Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны  $\lambda = 0,63$  мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой, причем плоская поверхность линзы и пластинка параллельны друг другу (рис.6). Найдите радиус первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы  $R = 10$  м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный  $n = 1,5$ . Свет падает по нормали к пластинке.

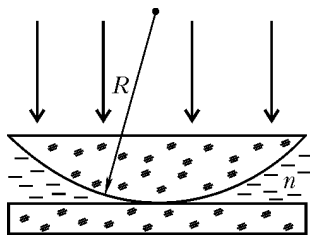


Рис. 6

### Задание 6

**Вопрос.** Какое явление называется фотоэффектом? Сформулируйте законы фотоэффекта.

**Задача.** Шар радиусом  $R$  из вольфрама, покрытый тонким слоем цезия, помещен в вакуум. Шар освещают лазером, дающим излучение с длиной волны  $\lambda_1$ . Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для цезия на вольфраме, равна  $\lambda_2$ . Определите максимальный заряд  $q_{\max}$ , который может приобрести шар. Постоянная Планка  $h$ , элементарный заряд  $e$ , скорость света  $c$ , электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

*Материалы по математике взяты из книги «Задачи вступительных испытаний по математике в МГУ имени*

*М.В.Ломоносова в 2010 году (с решениями): Учебное пособие» (М.: Издательство Московского университета, 2010)*

*Публикацию материалов по физике подготовили В.Русаков, С.Чесноков*

## МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В течение ряда лет Московский инженерно-физический институт – ныне Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – проводит Всероссийскую отраслевую физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проходит в несколько туров – с декабря по апрель. В 2009/10 учебном году олимпиада «Росатом» входила в перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством образования и науки России.

Ниже приводятся варианты заданий одного из туров олимпиады «Росатом» по математике и физике 2009/10 учебного года.

### Олимпиада «Росатом»

#### МАТЕМАТИКА

1. Решите системы:

$$а) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 3y = 14; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2|x - 2| - 3y = -3, \\ x - 3|y - 4| = 2. \end{cases}$$

2. Решите уравнения:

$$а) \sqrt{2x^2 - 5} = 5 - 2x^2;$$

$$б) 2x^2 + \sqrt{3}\sqrt{2x^2 - 5} - 11 + \sqrt{-x} = \sqrt{-x}.$$

3. Решите уравнения:

$$а) \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0;$$

$$б) 2\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 2 \cos x - 1 = 0.$$

4. Определите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sqrt{7x - x^2} - 6 \left( (8a - 15) \sin \frac{\pi x}{6} - 6 \cos \frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 \right) = 0$$

имеет ровно 5 решений. Решите уравнение при  $a = 0$ .