Для колебательного движения

$$v_{max} = x_{max}\omega .$$

В нашем случае $v_{max} = v_0$ и $x_{max} = s$, поэтому

$$v_0 = s\omega = \frac{sBh}{\sqrt{Lm}} .$$

Отсюда найдем массу перемычки:

$$m = \frac{s^2B^2h^2}{Lv_0^2} .$$

Скорость перемычки описывается уравнением

$$v = v_0 \cos \omega t .$$

В момент времени $t = \tau$ скорость $v = \frac{v_0}{2}$. Следовательно,

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi s}{3v_0} .$$

Вариант 4

1. По часовой стрелке, если смотреть со стороны магнита.

2. Меньшую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть семь верхних книг.

3. $F = \left(p_0 + \rho h\left(g - a\right)\right)S = \frac{3}{4}\pi d^2\left(p_0 + 0{,}75\rho g h\right)$.

4. Брусок остается неподвижным до тех пор, пока сила упругости, действующая на него со стороны нити, не достигнет максимального значения силы трения покоя:

$$T = F_{тр} = \mu M g .$$

Величина силы упругости нити T зависит от амплитуды колебаний груза. Амплитуда A равна начальному отклонению груза от положения равновесия, которое определяется равенством

$$mg = kx_0 = kA \text{, откуда } A = \frac{mg}{k} .$$

Максимальное растяжение пружины равно

$$x_{max} = 2A = \frac{2mg}{k} .$$

Соответственно,

$$T = kx_{max} = 2mg .$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{T}{Mg} = 0,5 .$$

5. $Q_{23} = \nu RT_1 \approx 2,5$ кДж.

6. $\varphi = \dfrac{q\sqrt{5}}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

7. См. рис.8.

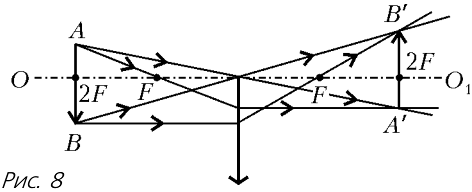

Рис. 8

8. $\varphi_{\max} = \dfrac{h\dfrac{c}{\lambda} - A}{e} = 6,07$ В (здесь c – скорость света, e – элементарный электрический заряд).

9. До размыкания ключа установившаяся сила тока равна $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_3}$ (через резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2 ток не течет). После размыкания ключа электрическая энергия катушки выделится в виде тепла на резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 (через резистор сопротивлением R_3 ток течь не будет):

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathscr{E}^2}{2R_3^2} = Q_1 + Q_2 .$$

Так как эти резисторы соединены параллельно, разности потенциалов на них одинаковы, поэтому

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\Delta t , \; Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\Delta t , \text{ и } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Окончательно находим

$$Q_2 = Q - Q_1 = \frac{Q}{1 + (R_2/R_1)} = \frac{3L\mathscr{E}^2}{R^2} .$$

10. Пусть за время удара Δt шарика о клин между ними действовала сила, среднее значение которой равно F, причем из-за отсутствия трения сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно поверхности клина (рис.9,*а*). Тогда можно записать (рис.9,*б*)

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 .$$

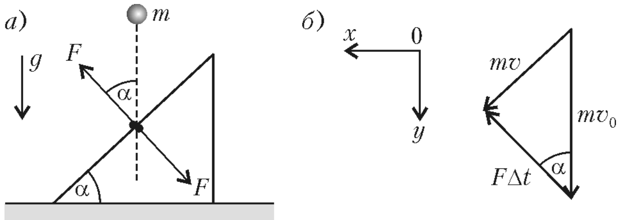

Рис. 9

В проекциях на координатные оси уравнения второго закона Ньютона для обоих тел будут иметь вид

$$mv_y - mv_0 = -F\Delta t\cos\alpha,$$

$$mv_x = F\Delta t\sin\alpha,$$

$$Mu = F\Delta t\sin\alpha,$$

где u – скорость клина, с которой он стал двигаться вдоль оси x. Отсюда найдем

$$v_x = \frac{M}{m}u, \quad v_y = v_0 - \frac{M}{m}u\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2\frac{u^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{M}{m}uv_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \text{ или } v^2 = v_0^2 - \frac{M}{m}u^2.$$

Из двух выражений для v^2 получим

$$u = \frac{v_0\sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{3}v_0 m}{4M + m}.$$

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Дополнительное вступительное испытание

Вариант 1

1. $x = 2,\ y = 3$.

Для каждого решения системы выполняются условия $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, имеем

$$x^y = 2^{y\log_2 x} = 2^{x+1}.$$

Поэтому первое уравнение системы может быть переписано в виде

$$3 \cdot 2^{x+1} = 4^x + 8 .$$

Обозначив $t = 2^x$, уравнение можно переписать так: $t^2 - 6t + 8 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются два числа $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. Уравнения $2^x = 2$ и $2^x = 4$ имеют корнями числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Первый корень не удовлетворяет определенным выше условиям. Значит, $x = 2$ и $y = \frac{2+1}{\log_2 2} = 3$. Проверкой убеждаемся, что найденная пара чисел действительно есть решение данной системы уравнений.

2. $\frac{2}{3} \le x < \frac{4}{5}$.

Все решения удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1-x}{x} > 0, \quad \frac{3x-2}{3x+4} \ge 0 .$$

Множество решений первого из них имеет вид $0 < x < 1$. Второму же удовлетворяют числа $x < -\frac{4}{3}$ и $x \ge \frac{2}{3}$. Значит, множество решений исходного неравенства содержится в промежутке $\frac{2}{3} \le x < 1$. На этом промежутке данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 > \frac{3x-2}{3x+4}$$

и неравенству

$$(1-x)^2 (3x+4) > x^2 (3x-2) .$$

После упрощений это неравенство принимает вид $4 - 5x > 0$. Из его решений в промежуток $\frac{2}{3} \le x < 1$ попадают лишь точки, удовлетворяющие неравенствам $\frac{2}{3} \le x < \frac{4}{5}$.

3. $\frac{12}{7}$.

Пусть x − значение аргумента, при котором данная функция принимает положительное значение. Тогда

$$0 < 3\cos^2 x + 2\sin x - 1 = -3\sin^2 x + 2\sin x + 2 =$$

$$= -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \le \frac{7}{3} ,$$

и

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1} \ge \frac{4}{7/3} = \frac{12}{7}\,.$$

Значение $12/7$ принимается при $\sin x = 1/3$.

4. $\frac{25}{4}$.

Обозначим величину угла $\angle BAC$ буквой α. Сумма углов треугольника равна π, поэтому $\angle DCB = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Высоты треугольников ADC и BDC, проведенные из вершины C, совпадают. Поэтому имеем равенство

$$AC\sin\alpha = BC\sin\frac{\pi}{12}\,. \qquad (1)$$

Медиана CD делит площадь треугольника ABC пополам, поэтому высоты треугольников ADC и BDC, проведенные на их общее основание CD, равны. Приравнивая их длины, получаем равенство

$$BC\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AC\sin\frac{5\pi}{12}\,. \qquad (2)$$

Перемножая почленно равенства (1) и (2), сокращая затем получившееся равенство на $AC \cdot BC$, находим

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\,,$$

или $\sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\angle ADC > \angle ACD$ или $\frac{7\pi}{12} - \alpha > \frac{5\pi}{12}$. Итак, $\alpha < \frac{\pi}{6}$, так что $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Итак, углы треугольника ABC, прилежащие к стороне AB, равны по $\frac{\pi}{12}$. Значит, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AC = BC = 5$ и $\angle ACB = \frac{5\pi}{6}$. Искомая площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{25}{4}\,.$$

Заметим, что равенство (1) можно получить также с помощью теоремы синусов, примененной к треугольнику ABC, а (2) следует из равенства площадей треугольников ADC и DBC.

5. 80 м.

Обозначим буквой S расстояние в метрах от леса до тернового куста и буквой v первоначальную скорость зайца в метрах в минуту. Скорость, с которой волк догонял зайца, также равна v метров в минуту. Возможны два случая.

а) Предположим, что расстояние от леса до тернового куста превосходит или равно 100 м. Тогда волк выбежал из леса уже после того, как заяц наступил на колючку. Значит, заяц бежал последние 50 м со скоростью $\frac{2}{3}v$ м/мин и потратил на это $50\Big/\left(\frac{2}{3}v\right) = 75/v$ мин. За это время волк пробежал $v \cdot \frac{75}{v} = 75$ м. Учитывая же, что ему осталось добежать до куста 10 м, заключаем, что расстояние от леса до куста равно 85 м, вопреки нашему предположению. Этот случай невозможен.

б) Итак, расстояние от леса до куста меньше 100 м. Это значит, что на виду у волка заяц пробежал $50 - S/2$ м со скоростью v м/мин, а оставшиеся $S/2$ м со скоростью $2v/3$ м/мин, затратив на последние 50 м

$$\frac{50 - S/2}{v} + \frac{S/2}{2v/3}$$

минут. За это время, двигаясь со скоростью v м/мин, волк пробежал $(50 - S/2) + 3S/4$ м, что согласно условию равно $S - 10$ м. Решая уравнение $50 - S/2 + 3S/4 = S - 10$, находим $S = 80$ м.

6. Пусть E – точка касания сферы с прямой DB_1. Плоскость AB_1C_1D пересекает сферу по окружности, прямые DB_1 и DC_1 касаются этой окружности. Так как длины касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, имеем $DE = DC_1 = \sqrt{2}$. Проведем в плоскости AB_1C_1D через точку E прямую перпендикулярно DB_1 и точку ее пересечения с прямой B_1C_1 обозначим буквой F. Так как F – точка пересечения перпендикуляров к касательным, проведенных в точках касания, то F – центр указанной выше окружности, а центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости AB_1C_1D, проходящем через точку F.

Прямоугольные треугольники EB_1F и DB_1C_1 имеют общий острый угол и потому подобны. Значит, $\frac{EF}{EB_1} = \frac{DC_1}{B_1C_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Учитывая, что $EB_1 = DB_1 - DE = \sqrt{18} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, находим $FC_1 = EF = 1$.

Проведем через точку F плоскость, перпендикулярную ребру B_1C_1. Точки ее пересечения с ребрами A_1D_1, AD, BC обозначим буквами P, Q, R соответственно. Проведем в плоскости $PFRQ$ через точку F перпендикуляр к прямой QF и точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми QP и QR обозначим буквами L и M соответственно. Докажем, что прямая LM перпендикулярна плоскости AB_1C_1D и потому центр сферы O лежит на ней. Прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости $PFRQ$, а потому она перпендикулярна и прямой LM. По построению имеем также $LM \perp QF$. Итак, прямая LM перпендикулярна двум прямым B_1C_1 и QF, лежащим в плоскости AB_1C_1D, а потому она перпендикулярна этой плоскости. Значит, центр сферы лежит на прямой LM.

Обозначим буквой K проекцию точки O на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. Так как наклонные OC_1 и OD_1 − радиусы сферы, т.е. имеют равную длину, то их проекции, т.е. отрезки KC_1 и KD_1, также имеют равную длину. Но это значит, что точка K лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ на перпендикуляре к отрезку C_1D_1, проходящем через его середину N. Прямые OF и B_1C_1 перпендикулярны, это доказано ранее. По теореме о трех перпендикулярах можно утверждать, что и KF − проекция OF на плоскость $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярна прямой B_1C_1. Учитывая, что прямая PF также перпендикулярна B_1C_1, заключаем, что точка K лежит на прямой PF. Итак, K есть точка пересечения прямой PF и перпендикуляра к C_1D_1, проходящего через точку N.

Для дальнейшего удобно вынести плоскость $PFRQ$ и все построенные в ней точки и прямые на отдельный чертеж. По доказанному выше центр сферы O лежит на пересечении прямой LM и перпендикуляра к PF, проведенного через точку K, причем K есть середина отрезка PF. Учитывая, что $PFRQ$ − квадрат, заключаем, что $OK = KF = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OKC_1, находим

$$OC_1^2 = OK^2 + KC_1^2 = OK^2 + KF^2 + FC_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{6}{4}$$

и

$$OC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Вариант 2

1. $n = 33$.

Делим 405 на 18 с остатком; $405 = 18 \cdot 22 + 9$. Поэтому $a_{23} = -405 + 18 \cdot 22 = -9$, $a_{24} = 9$. Так как $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{23}| =$

$= \dfrac{405+9}{2}\cdot 23 = 207\cdot 23 = 4761$, то $a_{24}+a_{25}+\ldots+a_n = 5661 - 4761 = 900$. Пусть в последней сумме k слагаемых. Тогда $a_n = 9 + 18(k-1) = 18k - 9$ и получаем уравнение $\dfrac{9+(18k-9)}{2}\cdot k = 900$, $9k^2 = 900$, $k^2 = 100$. Отсюда $k = 10$ и $n = 23 + k = 33$.

2. $(2;3)\cup\left(\dfrac{7}{2};4\right)\cup(4;5)$.

Так как $-x^2+7x-10=(x-2)(5-x)$, то ОДЗ: $2 < x < 5$, $x\neq 3$, $x\neq 4$ и $\log_{5-x}(x-2)\neq 1$. На ОДЗ:

$$\frac{1+1+\log_{x-2}(5-x)}{2-2\log_{5-x}(x-2)}\leq 2.$$

Пусть $\log_{x-2}(5-x)=y$, тогда $\log_{5-x}(x-2)=\dfrac{1}{y}$ и $y\neq 1$ (по ОДЗ), $\dfrac{2+y}{2-\dfrac{2}{y}}\leq 2$, $\dfrac{y(2+y)}{y-1}-4\leq 0$, $\dfrac{y^2-2y+4}{y-1}\leq 0$. Но $y^2-2y+4>0$ всегда, так как $D = -12 < 0$. Получаем $y < 1$, $\log_{x-2}(5-x)<1$. На ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2<1, \\ 5-x>x-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2>1, \\ 5-x<x-2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x<3, \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>3, \\ x>\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

и $x < 3$ или $x>\dfrac{7}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

3. $\begin{cases} x=\dfrac{2\pi+2}{15}, \\ y=\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{\pi-2}{3}}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2\pi-4}{15}, \\ y=\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{3}}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Правая часть равна 2. Так как $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geq 2$ и $\operatorname{tg}^2\alpha \geq 0$, то получаем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(5x+\sin^2 y\right)=0, \\ \left|\dfrac{5x+\cos 2y}{3}+\dfrac{3}{5x+\cos 2y}\right|=2. \end{cases}$$

Так как $\left|a+\frac{1}{a}\right|=2$ только при $a=\pm 1$, то

$$\begin{cases} 5x+\sin^2 y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ 5x+\cos 2y=\pm 3. \end{cases}$$

Отсюда $\sin^2 y-\cos 2y=\pi n\mp 3$; $\sin^2 y-\left(1-2\sin^2 y\right)=\pi n\mp 3$; $3\sin^2 y=\pi n+1\mp 3$.

1) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n-2}{3}$. Так как $0\leq \sin^2 y\leq 1$, то $n = 1$. Тогда $\sin^2 y=\dfrac{\pi-2}{3}$ и $x=\dfrac{1}{5}\left(\pi-\sin^2 y\right)=\dfrac{2\pi+2}{15}$. Получаем

$$\begin{cases} \sin y=\pm\sqrt{\dfrac{\pi-2}{3}}, \\ x=\dfrac{2\pi+2}{15}. \end{cases}$$

2) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n+4}{3}$. Тогда $n=-1$, $\sin^2 y=\dfrac{4-\pi}{3}$ и $x= =\dfrac{1}{5}\left(-\pi-\sin^2 y\right)=\dfrac{-2\pi-4}{15}$. Получаем

$$\begin{cases} \sin y=\pm\sqrt{\dfrac{4-\pi}{3}}, \\ x=\dfrac{-2\pi-4}{15}. \end{cases}$$

4. $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Пусть $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAC=\angle DAC=\alpha$, площадь $S_{ABC}=6\sqrt{2}$. Тогда $S_{ABC}=\dfrac{a\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}$, $S_{ACD}=\dfrac{b\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}$ и $\dfrac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{12\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=2$. Отсюда $b=2a$. Так как $\angle BAC=\angle DAC$ и четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\cup BC = \cup CD$ и $BC = CD$.

Тогда по теореме косинусов:

$$a^2 + AC^2 - 2aAC\cos\alpha = 4a^2 + AC^2 - 4aAC\cos\alpha .$$

Отсюда

$$a = \frac{2}{3}AC\cos\alpha .$$

Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}AC^2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{6}AC^2\sin 2\alpha .$$

Получаем

$$\frac{1}{6}\cdot 81\sin 2\alpha = 6\sqrt{2},\ \sin 2\alpha = \frac{36\sqrt{2}}{81} = \frac{4\sqrt{2}}{9},\ \cos 2\alpha = \sqrt{1-\frac{32}{81}} = \frac{7}{9}$$

(больше 0, так как $\angle BAD$ острый по условию).

Далее

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ и } a = \frac{2}{3}AC\cos\alpha = \frac{2}{3}\cdot 9\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2} .$$

По теореме косинусов:

$$BD^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2\cos 2\alpha = a^2\left(5 - 4\cos 2\alpha\right) = 32\cdot\frac{17}{9} .$$

Отсюда $BD = \dfrac{4\sqrt{34}}{3}$ и радиус описанной окружности

$$R = \frac{BD}{2\sin 2\alpha} = \frac{4\sqrt{34}\cdot 9}{24\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{17}}{2} .$$

5. $a \in \left[\dfrac{4}{5}; \dfrac{72-16\sqrt{14}}{5}\right]$.

Положим $t = 5^{-\sqrt{y}} \in (0; 1]$. Неравенство принимает вид: $64t^2 + (8-40a)t - 5a \le 0$. Корни $t_1 = -\dfrac{1}{8}$, $t_2 = \dfrac{5a}{8}$. Следовательно, чтобы y существовал, необходимо и достаточно $a > 0$ и $0 < t \le \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right)$. Положим $2^x = z \in (0; +\infty)$. Тогда чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $40t = 80z + 5a + \dfrac{a}{z}$ хотя бы при одном $t \in \left(0; \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right)\right]$ имело корень $z > 0$. Получаем квадратное уравнение $80z^2 + (5a - 40t)z + a = 0$. Так как в точке $z = 0$ левая часть равна