сительно дороги, то, из-за того что скорости отличаются в 2 раза, получается такая задача: нужно найти на высоте равнобедренного треугольника ABD такую точку X, чтобы сумма расстояний от X до вершин A, B и D была минимально возможной. Минимум суммы достигается при условии $\angle BXA = \angle AXD = \angle BXD = 120°$ (при другом расположении точки X сумма расстояний будет больше). Поэтому время в пути равно

$$t = \frac{AX}{v} + \frac{BX}{2v} = \frac{2b/\sqrt{3}}{v} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{\left(2b/\sqrt{3}\right)^2 - b^2}}{2v} =$$

$$= \frac{b\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - b^2}}{2v} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ мин}.$$

б) При ответе на второй вопрос нужно сравнить числа $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (заметим, что это примерно равно 12,99) и 13, или $15\sqrt{3}$ и 26. После возведения в квадрат получается $675 < 676$, т.е. $\frac{15\sqrt{3}}{2} < 13$. Значит, богатырь успеет добраться.

Имеется и алгебраическое решение, связанное с минимизацией времени:

$$\frac{x}{v} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2v} = \frac{2x + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2v},$$

где $x = AX$. Минимум $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - b^2}$ можно найти, например, с помощью производной.

4. Первой прыгает Лягушка, а за ней – Лягушонок, причем в том же направлении. Максимальная скорость дощечки равна 1,4 м/с.

Если лягушки прыгают одновременно, то, по закону сохранения импульса,

$$0 = (M_1 + M_2)(v - u) - mu,$$

где M_1 и M_2 – массы Лягушки и Лягушонка соответственно, v – скорость лягушек относительно дощечки, u – скорость дощечки после прыжка, m – масса дощечки. Отсюда получаем

$$u = \frac{(M_1 + M_2)v}{m + M_1 + M_2}.$$

Заметим, что множитель $(v - u)$ выражает собой скорость прыгнувших лягушек относительно воды.

Если первым прыгнул Лягушонок, то, по закону сохранения импульса,

$$0 = M_2(v - u_0) - (m + M_1)u_0 ,$$

где u_0 − скорость дощечки после его прыжка, откуда

$$u_0 = \frac{M_2 v}{m + M_1 + M_2} .$$

После прыжка Лягушки в том же направлении, по закону сохранения импульса,

$$-(m + M_1)u_0 = M_1(v - u_1) - mu_1 ,$$

откуда скорость дощечки после второго прыжка будет

$$u_1 = \frac{(m + M_1)u_0 + M_1 v}{m + M_1} = \frac{M_1 v}{m + M_1} + \frac{M_2 v}{m + M_1 + M_2} .$$

Если первой прыгнула Лягушка, а за ней прыгнул Лягушонок, то, аналогично предыдущему, скорость дощечки будет

$$u_2 = \frac{M_2 v}{m + M_2} + \frac{M_1 v}{m + M_1 + M_2} .$$

Подстановка заданных в условии числовых значений дает: u = 1,2 м/с, $u_1 = 1{,}36$ м/с, $u_2 = 1{,}4$ м/с. Таким образом, дощечка приобретет максимальную скорость, равную $u_2 =$ $= 1{,}4$ м/с, если первой прыгнет Лягушка, а за ней − Лягушонок.

5. $f(x_1) < f(x_2)$**.**

Корни уравнения: $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{2}}{7}$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{2}}{7}$. Преобразуем функцию $f(x)$, выделив квадратный трехчлен:

$$f(x) = 21x^5 + 32x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 4x + 3 + \sin x =$$
$$= 3x^3\left(7x^2 + 6x + 1\right) + 2x^2\left(7x^2 + 6x + 1\right) -$$
$$- 3x\left(7x^2 + 6x + 1\right) + \left(7x^2 + 6x + 1\right) + x + 2 + \sin x =$$
$$= \left(3x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right)\left(7x^2 + 6x + 1\right) + g(x) ,$$

где $g(x) = x + 2 + \sin x$. Поскольку $7x^2 + 6x + 1 = 0$, получаем $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$. Так как $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$, а функция $g(x)$ возрастает в четвертой четверти, то $g(x_1) < g(x_2)$, и поэтому $f(x_1) < f(x_2)$.

6. 363 K = 90 °C .

Ось x направим вверх, ноль возьмем на высоте h, заметив, что $h = \frac{p_0}{\rho g} = 10$ м. Найдем зависимость положения поршня x от температуры. Запишем условие равновесия – равенство давлений на поршень сверху и снизу:

$$p_0 + \rho g (L - h - x) = 1{,}75 p_0 \frac{h}{h + x} \frac{T}{T_0},$$

или

$$\frac{7}{4} p_0 h \frac{T}{T_0} = \rho g (L - x)(h + x).$$

Это означает, что график зависимости T от x представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и с корнями $x_1 = -h$ и $x_2 = L$. Следовательно, максимум температуры достигается в вершине параболы – в точке $x_0 = \frac{L - h}{2}$. Поэтому

$$T_{\max} = \frac{T_0}{7}\left(1 + \frac{L}{h}\right)^2 = \frac{121}{112} T_0 = 363\,\mathrm{K}.$$

Это и есть та температура, до которой необходимо нагреть нижнюю камеру реактора.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Межрегиональная многопрофильная олимпиада

МАТЕМАТИКА

I этап

1. 152. **2.** 17. **3.** 4. **4.** 377. **5.** 35. **6.** 216. **7.** 0. **8.** 11. **9.** 12. **10.** 2.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $a_{34} = \frac{71}{12}$. **2.** $3 + \sqrt{35}; 0$. **3.** -1. **4.** 39.

5. $-\dfrac{\arccos\frac{3}{5}}{14}+\dfrac{\pi n}{7}$; $\dfrac{\arccos\frac{3}{5}}{8}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. $|a|>1/2$; $|a|\neq 1$.

Вариант 2

1. $a_{40}=-\dfrac{64}{5}$. **2.** $2+\sqrt{23}; 0$. **3.** -1. **4.** 23.

5. $\dfrac{\arccos\frac{5}{7}}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; $-\dfrac{\arccos\frac{5}{7}}{10}+\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. $(5/6;1)\cup(1;5/3)\cup(5/2;+\infty)$.

Вариант 3

1. 6 часов 33 минуты.

2. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)+\pi m$; $\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi k$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

3. -4; $1+4\sqrt{3}$; 1. **4.** $\dfrac{S}{10}$.

5. $(-\infty;3)\cup(8;13)$. **6.** $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Вариант 4

1. 12 часов 36 минут.

2. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arcctg}\left(-2+\sqrt{3}\right)+\pi m$; $\operatorname{arcctg}\left(-2-\sqrt{3}\right)+\pi k$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

3. -2; $\sqrt{15}-3$. **4.** $\dfrac{5S}{9}$.

5. $(-11;-6)\cup(-1;+\infty)$. **6.** $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Задачи ежегодной олимпиады

1. 12 часов 45 минут. **2.** $\left[-2-\sqrt{4+\cos\dfrac{3}{2}};0\right)$.

3. $\dfrac{S_{QRTF}}{S_{ABCD}}=\dfrac{2}{15}$.

4. При $a\in\left(-\infty;-2-\sqrt{8}\right]\cup\left[-2+\sqrt{8};+\infty\right)$ решения есть.

5. 481 и 74 или 74 и 481. **6.** Неверно.

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады

1. $u_1 = \dfrac{v + (c/n)}{1 + \left(v/(nc)\right)}$. **2.** $D_1 = \dfrac{\nu_2 D_2}{\nu_1} = 100$ мм.

3. $v_2 = v + \dfrac{m(v + v_1)}{M} = 2{,}25$ м/с.

4. $n = \left(\dfrac{p}{p_0} - 1\right)\dfrac{VT_0}{V_0T} = 637$.

5. $Q_1 = -Q_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a_1 a_2 R_1 \mathscr{E}}{(a_1 + a_2)(R_1 + R_2)}$.

6. $\alpha = 2\arccos\dfrac{n}{2} \approx 74^\circ$. **7.** $m = \dfrac{rm_1}{\lambda + r} \approx 0{,}035$ кг.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $s = \dfrac{2v_2^2 L}{v_2^2 - v_1^2} = 7{,}2$ км. **2.** $A' = \dfrac{5A}{3} = 5$ Дж.

3. $E_{\text{сум}} = \dfrac{3}{2}pV = 6 \cdot 10^3$ Дж. **4.** $\varphi = \dfrac{16\rho I}{\pi D d^2} \approx 1{,}11$ Тл/с.

5. Для преломленного луча $\delta_{\text{пр}} = \alpha - \arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n} \approx 19^\circ$, для отраженного от поверхности стекла луча $\delta_{\text{отр}} = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ$.

Вариант 2

1. $t_2 = \dfrac{(v_1 + v_2)t_1}{v_2} = 16$ мин. **2.** $A' = 3A = 3$ Дж.

3. $E_{\text{ср}} = \dfrac{3}{2}pV\dfrac{\mathrm{M}}{N_{\mathrm{A}}m} \approx 3 \cdot 10^{-20}$ Дж.

4. $I = \dfrac{\Delta BaS}{4\rho\Delta t} = 2$ А. **5.** $\delta = \arcsin\dfrac{n_2\sin\alpha}{n_1} \approx 50{,}6^\circ$.

Вариант 3

1. $\tau = \dfrac{t}{2} = 3$ с. **2.** $m = \dfrac{k\left(A^2 - x^2\right)}{v^2} = 0{,}2$ кг.

3. $A = Q + \dfrac{3}{2}R\nu\left|\Delta T\right| \approx 14{,}5$ кДж. **4.** $R_x = \dfrac{R_0}{\sqrt{2}} \approx 20$ Ом.

5. $\lambda_ж = \lambda_в \sin\theta_{пр} = 300$ нм.

Вариант 4

1. $a = \dfrac{2l(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 3{,}2$ м/с^2.

2. $x = \sqrt{\dfrac{m\left(v_m^2 - v^2\right)}{k}} = 0{,}06$ м.

3. $\Delta T = \dfrac{2(Q - A)}{3\nu R} \approx 152$ К. **4.** $\mathcal{E} = 3IR = 300$ В.

5. $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1 \sin\beta}{\sin\alpha} \approx 606$ нм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Задачи первого тура

10 класс

1. $h = 15$ м. **2.** 3. **3.** $v_1/v_2 = 2$. **4.** 11,5. **5.** $\Delta T = 0{,}3$ К. **6.** $Q/q = 1$. **7.** $v = 2$ м/с. **8.** $C = 2$ мкФ. **9.** $R = 10$ Ом. **10.** $v = 50$ м/с.

11 класс

1. $h = 30$ м. **2.** $a_2 = 0{,}15$ м/с^2. **3.** $v = 1$ м/с. **4.** 18%. **5.** $q_2 = -8$ нКл. **6.** $U = 3$ В. **7.** $n = 1{,}7$. **8.** $F = 1$ Н. **9.** $a = 10$ м/с^2. **10.** $t = 5$ мс.

Задачи второго тура

10 класс

1. $t = 20$ с. **2.** $\varphi = 30°$. **3.** $T = 0{,}44$ с. **4.** $A = 0{,}15$ Дж. **5.** $\rho = 10$ г/см^3. **6.** $m = 18$ кг. **7.** $\Delta T_2 = 15$ К. **8.** $q = 0{,}4$ мкКл. **9.** $Q = 4$ мДж. **10.** $I = 2$ А.

11 класс

1. $v = 10$ м/с. **2.** $F = 75$ Н. **3.** $v_2 = 2$ м/с. **4.** $Q_2 = 400$ Дж. **5.** $q_2/q_1 = -2$. **6.** $Q = 5$ мДж. **7.** $B = 0{,}1$ Тл. **8.** $E_i = 0{,}01$ В. **9.** $L = 4$ м. **10.** 500.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 0$. **2.** $F = \mu mg$. **3.** $Q = \dfrac{mv_0^2}{2} + mgh$.

4. $U = \dfrac{3}{2}pV = 9 \cdot 10^3$ Дж. **5.** $x = 0{,}1\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (м).

6. Увеличить в 4 раза. **7.** $q_C = \dfrac{4}{9}C\mathcal{E}$.

8. $A = \dfrac{1}{2}\nu R\alpha\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 1{,}33 \cdot 10^{-1}$ Дж. *Указание.* Покажите, что в заданном процессе давление газа линейно зависит от его объема.

9. $p_1 = p_2 - F\Delta t = 12$ кг · м/с.

10. При постоянной скорости перемещения перемычки мощность силы тяжести, действующей на перемычку, равна электрической мощности, выделяющейся на сопротивлении R:

$$Fv = \frac{\mathcal{E}^2}{R}, \text{ или } mg\sin\alpha \cdot v = \frac{\mathcal{E}^2}{R}, \text{ где } \mathcal{E} = vBL.$$

Отсюда получаем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2L^2}.$$

Вариант 2

1. $p = mv = mx' = m(4 - 4t) = 0$.

2. $a_{\max} = v\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10$ м/с^2. **3.** $T = \dfrac{mg\sqrt{3}}{4}$.

4. Если брусок массой m остается неподвижным при смещении на x бруска массой $2m$, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массой $2m$ обращается в ноль):

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu \cdot 2mgx, \text{ или } F = \frac{kx}{2} + \mu \cdot 2mg.$$

Уравнение движения бруска массой m имеет вид

$$ma = kx - \mu mg.$$

Брусок массой m сдвинется при условии $a \geq 0$, т.е. $kx \geq \mu \cdot mg$.

Минимальное значение силы получим, если положим $kx = \mu mg$. Таким образом,

$$F_{\min} = \frac{5}{2}\mu mg .$$

5. $Q_{12} = \nu RT_1 \approx 2,5$ кДж .

6. $A = 0$. *Указание.* $A = q(\varphi_\infty - \varphi_B)$, где $\varphi_B = k\frac{2q}{L} + k\frac{q}{L} - k\frac{6q}{2L} = 0$.

7. $\mathcal{E} = 31$ В .

8. См. рис.6.

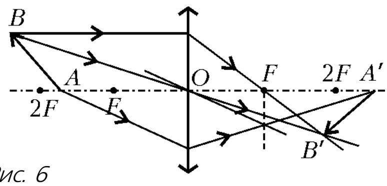

Рис. 6

9. $\varepsilon = A + \frac{p^2}{2m} = 7,85 \cdot 10^{-19}$ Дж .

10. По закону электромагнитной индукции Фарадея,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -S_1\frac{\Delta B}{\Delta t} + S_2\frac{\Delta B}{\Delta t} = (S_2 - S_1)\frac{\Delta B}{\Delta t} .$$

По закону Ома, $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$. Искомый заряд равен

$$q = I\Delta t = \frac{S_2 - S_1}{R}\Delta B .$$

Так как $\Delta B = 0 - B = -B$, то

$$q = \frac{S_1 - S_2}{R}B = \frac{(2a)^2 - a^2}{R}B = \frac{3a^2}{R}B .$$

Вариант 3

1. $\frac{t_1}{t_2} = 1$.

2. Из условия равновесия стержня находим $T = 4mg$.

3. $h_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} = 8000$ м .

4. Пусть скорости грузов в момент прохождения положения равновесия равны v_1 и v_2. Тогда, пренебрегая трением, в соответствии с законом сохранения механической энергии запишем

$$\frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2mg \cdot 2L - mgL .$$

Поскольку угловая скорость ω вращения грузов одна и та же, то

$$v_1 = \omega \cdot 2L , \ v_2 = \omega L , \ v_1 = 2v_2 .$$

Отсюда найдем искомые скорости:

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{2gL}{3}} , \ v_2 = \sqrt{\frac{2gL}{3}} .$$

5. После установления равновесия в системе температура обеих частей сосуда станет одной и той же и равной T, а гелий равномерно распределится по всему сосуду. Температура в сосуде определяется из закона сохранения энергии:

$$U = \frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) RT ,$$

откуда

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 400 \text{ К} .$$

6. Работа сил электрического поля, необходимая для перестройки системы, равна убыли потенциальной энергии взаимодействующих зарядов:

$$A = W_1 - W_2 .$$

Начальная энергия системы была

$$W_1 = k\frac{q \cdot q}{a} + k\frac{q \cdot 2q}{a} + k\frac{2q \cdot q}{a} = 5k\frac{q^2}{a} .$$

Конечная энергия системы стала

$$W_2 = k\frac{q \cdot q}{a} + k\frac{q \cdot 2q}{2a} + k\frac{2q \cdot q}{a} = 4k\frac{q^2}{a} .$$

Таким образом,

$$A = W_1 - W_2 = k\frac{q^2}{a} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} .$$

7. См. рис.7.

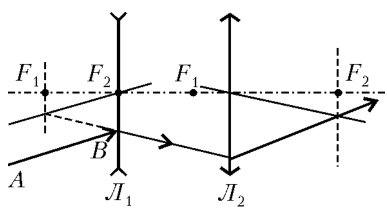

Рис. 7

8. $q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 r \dfrac{h\dfrac{c}{\lambda} - A}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-11}$ Кл (здесь c – скорость света, e – элементарный электрический заряд).

9. На двух резисторах выделяется количество теплоты

$$Q = A - \Delta W .$$

Работа источника тока равна

$$A = \Delta q\mathcal{E} = 2CU\mathcal{E} .$$

Приращение энергии батареи конденсаторов равно

$$\Delta W = \frac{2CU^2}{2} = CU^2 .$$

Поскольку резисторы соединены параллельно, то

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\Delta t , \; Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\Delta t , \text{ и } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Окончательно находим

$$Q_1 = Q - Q_2 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2} = CU\left(2\mathcal{E} - U\right)\frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

10. Так как сопротивление контура $R = 0$, суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину x и в ней появился ток I, то изменение суммарного магнитного потока равно

$$\Delta\Phi = Bhx + LI = 0 .$$

Отсюда находим

$$I = -\frac{Bh}{L}x .$$

По закону Ампера сила, действующая на перемычку с током, равна

$$F_x = IBh = -\frac{B^2h^2}{L}x .$$

Ускорение перемычки равно

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2h^2}{mL}x ,$$

откуда следует, что перемычка совершает колебательное движение с круговой частотой

$$\omega = \frac{Bh}{\sqrt{mL}} .$$